

4. ÜBUNGSBLATT ZUR MATHEMATIK FÜR STUDIERENDE DER BIOLOGIE UND DES LEHRAMTES CHEMIE IM WS 2024/25

Aufgabe 1. (3P+4P+3P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Inverse von A und B über die reduzierte Zeilen-Stufen-Form und überprüfen Sie jeweils Ihr Ergebnis, indem Sie $A \cdot A^{-1}$ oder $A^{-1}A$ (und entsprechend für B) rechnen.
- b) Lösen Sie die LGS $Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $By = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. (4P+4P+4P)

Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) Bringen Sie A in Zeilen-Stufenform.
- b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?
- c) Bestimmen Sie jeweils die homogene Lösungsmenge $Ax = b$: Einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A invertierbar ist, und einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A nicht invertierbar ist.
Bemerkung: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie stattdessen $t = 0$ und $t = 1$.

Aufgabe 3. (3P+3P+4P+4P+4P)

Wir sagen eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt.

- a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass dann $I_n - 2P$ invertierbar ist (*Hinweis:* Betrachten Sie $(I_n - 2P)^2$).
- b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Projektionen.
- c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Rechtsinverse, d.h. $AB = I_n$. Zeigen Sie, dass BA eine Projektion ist.
- d) Finden Sie alle Rechtsinverse zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit Dimension 2×1 .
- e) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Projektionen für $n = 2$ gibt.