Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart
B.Sc. B. Heinen

12. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2024/25

Aufgabe 1. (3P+3P+4P)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - \sin(\pi x) + \frac{x^2}{5}.$$

Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $[2, 4]$ den Wert π annimmt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [2, 4]$ mit $f(x_0) = \pi$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Zeigen Sie, dass g drei Nullstellen auf dem Intervall $[-3, 3]$ hat.

c) Seien $h_1, h_2 : [0, 1] \to [0, 1]$ stetige Funktionen mit:

$$h_1(0) = 0 \qquad h_2(0) = 1$$
$$h_1(1) = 1 \qquad h_2(1) = 0$$

Zeigen Sie, dass sich die Graphen von h_1 und h_2 schneiden, d.h. es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit:

$$h_1(x) = h_2(x)$$

Aufgabe 2. (je 2P=12P)

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \exp(\sin(x))$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(\exp(\exp(x)))$

d) $f_4 : (e, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x \log(x) - x)$

e) $f_5 : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^a \quad$ für $a \in \mathbb{R}$

f) $f_6 : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 31. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (3P+4P+3P)

Wir betrachten die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion jeweils auf einer eingeschränkten Definitionsmenge

$$\begin{aligned} \sin &: \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to (-1,1), \quad && x \mapsto \sin(x) \\ \cos &: (0,\pi) \to (-1,1), && x \mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass beide Funktionen invertierbar sind. Man nennt die Umkehrfunktion von Sinus Arkussinus und schreibt dafür $\arcsin := \sin^{-1}$ und die Umkehrfunktion von Cosinus Arkuscosinus und schreibt $\arccos := \cos^{-1}$.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen von

$$\arcsin : (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$$

mit Hilfe der Ableitungsregeln.
Hinweis: *Sie dürfen die Gleichung* $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *benutzen.*

c) Folgern sie, dass $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in (-1,1)$ gilt.
Hinweis: *Benutzen Sie Aufgabe 4.*

Aufgabe 4. (4P+4P)

Seien $a < b$ und

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion.

a) Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

b) Sei $a < c < b$ mit $f'(x) \leq 0$ für $x \in (a,c]$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in [c,b)$. Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum bei c hat.

Hinweis: *Betrachten Sie Monotonie.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 31. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.