Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart
B.Sc. B. Heinen

11. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2024/25

Aufgabe 1. (2P+2P+2P+2P)

Bestimmen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:

a) $\log(x + x^2) = \log(x) + 1$

b) $1 + 2^{x+1} + 4^x = 4$

c) $8 \cdot 3^{x+1} = 7^{2x-3}$

d) $7^{(a^x)} = a^{(7^x)}$

Dabei ist in der letzten Gleichung $a > 7$ eine reele Zahl.
Bemerkung: *Geben Sie die Lösung ähnlich der Form* $x = \frac{\log(3)+\log(4)}{\log(\log(5)+1)}$ *an.*

Aufgabe 2. (je 2P=10P)

Ferdinand beobachtet eine Schale mit Atomen eines radioaktiven Isotops. Zu Beginn der Beobachtung, d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$, zählt er 20 000 Atome in der Schale.[1] Dabei stellt er fest, dass sich alle 10 Minuten die Anzahl der Atome halbiert.

a) (i) Nach wie vielen Minuten ist nur noch die Hälfte des Isotops vorhanden?
   (ii) Nach wie vielen Minuten sind nur noch 5000 Atome des Isotops in der Schale?

b) Während Ferdinands Beobachtung lässt sich die Atomanzahl $A(t)$ nach t Minuten beschreiben als Funktion
$$A(t) = A_0 \cdot b^t.$$
Bestimmen Sie die reelem Parameter b und A_0.

c) Wie viele Atome zählt Ferdinand nach 6 Minuten (aufgerundet)? Wie viele Atome zählt er nach zwei Stunden?

d) Wie lange muss Ferdinand warten, bis in der Schale nur noch zwei Atome sind?

e) Ferdinand hat vor Beobachtungsbeginn eine Schale auf den Tisch gestellt und sich einen Kaffee gemacht. Wie lange hat Ferdinand zum Kaffee kochen gebraucht, wenn ursprünglich 50 000 Isotope in der Schale waren?

[1] Als Mathematiker kann er sehr schnell und sehr genau zählen!

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+2P+2P+4P)

a) Geben Sie jeweils an, ob die Funktion bei a einen Grenzwert besitzt und geben Sie diesen gegebenfalls an.

   (i) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\frac{\pi}{2}\cos(\frac{1}{x}))$ bei $a = \infty$.

   (ii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x-1 & , x < 2 \\ 3-x & , x \geq 2 \end{cases}$ bei $a = 2$.

   (iii) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ bei $a = \infty$.

b) Zeigen Sie, dass log streng monoton wachsend ist, d.h. für $x < y$ gilt $\log(x) < \log(y)$. Folgern Sie, dass $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass die Funktionen sin, cos und log stetig sind.

Aufgabe 4. (2,5P+2,5P+2,5P+2,5P)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 2x - 7}{x^3 - x + 1}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3 - 8}{x}$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 9x + 2}{x^2 - 3x + 1}$

Aufgabe 5. (2P)

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f\colon (1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

und

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Untersuchen Sie, ob f und g bei $x = 1$ einen Grenzwert haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.