Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart
B.Sc. B. Heinen

10. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2024/25

Aufgabe 1. (3P+4P+3P)

Bestimmen Sie die Reihenwerte der folgenden konvergierenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2^k + 4^k)^2}{32^k} \right)$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k(k+2)} \right)$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3^k + 2^k}{5^k} - \frac{1}{11^{k+1}} \right)$

Hinweis: *Benutzen Sie für b) die Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (2P+2P+2P+3P+3P)

Geben Sie jeweils (wie immer mit einer Begründung) an, ob die folgenden Reihen bedingt konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k) + 1}{k^2}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (k^2 + 1)}{k!}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k))}{\sqrt{k}}$

Aufgabe 3. (3P+3P)

Ferdinand hat zu Weihnachten unendlich viele Geschenke bekommen. Als er sie der Größe nach sortiert, stellt er fest, dass das n-te Päckchen immer ein Würfel der Größe $\frac{1}{n}$ (in Metern) ist, was das Aufräumen sehr erleichtert.

a) Er überlegt sich, wie hoch der Turm wird, wenn er die Päckchen aufeinander stapelt. Übertrifft der Turm auch Ferdinand's Weihnachtsbaum?

b) Alle Geschenke waren passend mit Geschenkpapier umwickelt. Musste der Weihnachtsmann für Ferdinand unendlich oft Geschenkpapier einkaufen oder hat einmal Einkaufen gereicht?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 17. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (3P+2P+3P+2P+2P)

Wir wollen in dieser Aufgabe das Leibniz-Kriterium aus der Vorlesung beweisen. Sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge, d.h. es gilt $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, insbesondere ist damit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ konvergiert. Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n = s_{2n} := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$ die Folge der geraden Partialsummen. Zeigen Sie, dass g_n monoton fallend ist.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n = s_{2n-1} := \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k$ die Folge der ungeraden Partialsummen. Zeigen Sie, dass u_n monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass $g_n \geq u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und folgern Sie, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} u_n$$

gilt. **Hinweis :** *Betrachten Sie die Differenz $g_n - u_n$ und benutzen Sie die Rechenregeln für konvergente Folgen.*

e) Folgern Sie, dass die Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ und damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 17. 01. 2025 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.