Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart
B.Sc. B. Heinen

7. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2024/25

Aufgabe 1. (3P+3P+3P+2P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 2)$ zum Eigenwert 2 von A.

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und seine Nullstellen.

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

d) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie, falls A nicht diagonalisierbar ist oder geben Sie eine entsprechende, invertierbare Matrix U mit $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ an.

Aufgabe 2. (2P+4P+4P)

Wir betrachten die Wurzeln- und Hasenpopulation in einem Gebiet. Hierbei sei W_n die Wurzelpopulation und H_n die Hasenpopulation nach n Jahren seit Beobachtungsbeginn. Wir modellieren das jährliche Wachstum mit den Formeln:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &:= 5 \cdot W_n - 3 \cdot H_n \\ H_{n+1} &:= \lambda \cdot H_n, \end{aligned}$$

wobei $0 < \lambda < 5$ ein freier Parameter ist. Das heißt, jedes Jahr verfünffachen sich die Wurzeln, wovon jeder Hasen drei Wurzeln frisst. Die Hasen verdoppeln jedes Jahr ihre Population solange es genügend Wurzeln zum Fressen gibt.

a) Finden Sie eine Matrix A, sodass $\begin{pmatrix} W_{n+1} \\ H_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} W_n \\ H_n \end{pmatrix}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Wie müsste das Wurzeln zu Hasenverhältnis sein, damit sich beide Populationen mit dem Faktor λ vervielfachen? Gibt es auch andere Wurzeln-Hasen-Verhältnisse, sodass sich beide Populationen jedes Jahr um einen konstanten Faktor μ vervielfachen?
Hinweis: *Das Verhältnis findet sich in Form eines Eigenvektors. Was wäre der zugehörige Eigenwert?*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 13. 12. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

c) Seien $W_0 = 3$ und $H_0 = 2$ die anfänglichen Populationen sowie $\lambda = 3$. Bestimmen Sie eine explizite Formel für W_n in Abhängigkeit von n. Wie bewerten Sie die Modellierung des Wachstums?

Aufgabe 3. (1.5P+1.5P+1.5P+1.5P+1.5P+1.5P=9P)

Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen $z = 1 + i$ und $w = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$. Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $z \cdot w$

b) $\overline{z} \cdot \overline{w}$

c) $\frac{z}{w}$

d) $|z \cdot w|$

e) $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(w)$

f) $(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))^{2024}$

Aufgabe 4. (2,5P+2,5P+2,5P+2,5P)

a) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^3 = 1$. (*Hinweis:* Berechnen Sie $(X-1)(X^2+X+1)$.)

b) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(X) = X^4 - 16$.

c) Finden Sie ein Polynom vom Grad 2 mit reellen Koeffizienten, welches $z = 3+2i$ als Nullstelle hat. Was ist die andere Nullstelle w dieses Polynoms? Finden Sie einen Bezug zwischen z und w.

d) Beweisen sie Bermerkung 5.12 aus der Vorlesung: Sei z eine komplexe Nullstelle des reellen Polynoms $p(X)$. Dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $p(X)$. (Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ gilt.)

Für die gesamte Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass ein komplexes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat. Dabei werden Nullstellen mit ihren Vielfachheiten gezählt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 13. 12. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.