

5. ÜBUNGSBLATT ZUR MATHEMATIK FÜR STUDIERENDE DER BIOLOGIE UND DES LEHRAMTES CHEMIE IM WS 2024/25

Aufgabe 1. (2P+3P+3P+3P+3P)

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen jeweils die Determinante in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$

a) $A := \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

c) $C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ t & 1-t & 2t+1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D := \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 0 & t & 4 \\ t & t+2 & t+2 \end{pmatrix}$

und geben Sie jeweils an, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen invertierbar sind.

Aufgabe 2. (7P)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 5 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2025 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (3P+3P+3P)

Wir betrachten für drei Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

- Berechnen sie die Determinante von A .
- Zeigen Sie, dass $\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
- Folgern Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn a, b und c paarweise verschieden sind.

Aufgabe 4. (4P+6P)

Gegeben sei die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit Einsen auf der Diagonalen von links unten nach rechts oben und sonst Nulleinträgen. , d.h. für die Einträge gilt

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i + j = n + 1 \\ 0, & \text{falls } i + j \neq n + 1 \end{cases}.$$

- a) Bestimmen Sie die Determinante von A_n für $n = 1, 2, 3, 4$.
- b) Geben Sie eine explizite Formel für $\det(A_n)$ in Abhängigkeit von n an und beweisen Sie diese mittels Induktion.