Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2024/25

Christian Steinhart

Stand 26. September 2024

Dieses Skript dient als Begleitmaterial zur Vorlesung und ist nicht als Ersatz für das Besuchen der Vorlesung gedacht, sondern als Nachschlagewerk und Unterstützung zur Erstellung von Notizen. Weiterhin ergänzt es teilweise die Vorlesung durch weitere Beispiele. Entsprechend wird die Nummerierung der Aussagen und Beispiele nicht genau mit der Nummerierung in der Vorlesung übereinstimmen.

Im Anhang wird Material aufgeführt, dass grundlegende mathematische Konzepte, die nicht im Fokus der Vorlesung stehen, näher beleuchtet, sofern sie für die Vorlesung relevant sind.

Dieses Skript basiert auf dem Skript von Johannes Hoffmann aus dem Semester 2022/23 ergänzt durch Teile der Vorlesung aus dem Semester 2023/24. Bitte melden Sie Fehler an Christian Steinhart.

Inhaltsverzeichnis

1. Aussagenlogik **3**

2. Lineare Gleichungssysteme **5**

3. Matrizen und Determinanten **14**
3.1. Addition, Multiplikation und Inverse von Matrizen 14
3.2. Determinanten 19

4. Eigenwerte und Eigenvektoren **25**

5. Komplexe Zahlen **34**

6. Folgen und Reihen **40**
6.1. Folgen 40
6.2. Reihen 44

7. (Konvergenz von) Funktionen und Stetigkeit **49**
7.1. Exponentialfunktionen und Logarithmen 49
7.2. Konvergenz von Funktionen 51
7.3. Stetigkeit 55

8. Differentialrechnung **58**

9. Integralrechnung **64**
9.1. Bestimmte und unbestimmte Integrale 64
9.2. Uneigentliche Integrale 68

10. (Gewöhnliche) Differentialgleichungen **69**

A. Kleines Lexikon mathematischer Konzepte **73**
A.1. Das griechische Alphabet 73
A.2. Mengen 74
A.3. Abbildungen/Funktionen 75
A.4. Summen und Produkte 76
A.5. Polynome/Polynomfunktionen 76
A.6. Winkel und Trigonometrie 77
A.7. Polynomdivision 78

1. Aussagenlogik

Definition 1.1. Gegeben sind zwei Aussagen „A“ und „B“. Wenn aus „A ist wahr“ auch „B ist wahr “ folgt, schreiben wir

$$A \Rightarrow B.$$

Wir sagen dann „A impliziert B“ oder „Aus A folgt B“.

Beispiel 1.2. Typische Beispiele von wahren Implikationen wären (mit ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$):

(a) Es regnet $\Rightarrow$ die Erde wird nass.

(b) Heute ist Samstag $\Rightarrow$ es ist Wochenende

(c) Es ist Freitag der 25. Oktober 2024 $\Rightarrow$ heute ist letzter Abgabetag des ersten Übungsblattes

(d) $a = 4 \Rightarrow a$ ist gerade.

(e) $a > b \Rightarrow a + 2 > b + 2$.

(f) Schweine fliegen $\Rightarrow$ Date

(g) Die Erde ist flach $\Rightarrow$ wir fallen nicht herunter

In Beispiel (a) haben wir die beiden Aussagen „Es regnet “ und „Die Erde wird nass“. Da jedesmal wenn es regnet die Erde nass wird, haben wir die Implikation gegeben. Es kann natürlich auch sein, dass die Erde nass wird, weil jemand seine Blumen gießt, die Implikation „Die Erde wird nass $\Rightarrow$ Es regnet“ wäre also falsch. Hier sollte noch erwähnt werden, dass die Implikation f) stimmt, da Schweine nicht fliegen, d.h. „aus einer falschen Aussage können wir eine beliebige Aussage folgern“. Ob wir nun ein Date bekommen oder nicht wissen wir immernoch nicht (wobei wir in diesem Fall eher von einem „Nein“ ausgehen können).
In g) haben wir das Gegenstück: Die Aussage dass wir nicht herunterfallen ist immer wahr, daher ist jede Implikation „$A \Rightarrow$ wir fallen nicht herunter“ richtig, unabhängig ob A nun stimmt oder nicht.

Definition 1.3. Gilt sowohl „$A \Rightarrow B$“ als auch „$B \Rightarrow A$“, dann schreiben wir „$A \iff B$“ und sagen „A ist äquivalent zu B“ oder „Es gilt A genau dann, wenn auch B gilt.“
Beispiele für Äquivalenzen sind in Beispiel 1.2 c) und e).

Bemerkung 1.4. Gegeben seien zwei (wahre) Implikationen „$A \Rightarrow B$“ und „$B \Rightarrow C$“.

(a) Wir haben dann direkt die Implikation „$A \Rightarrow C$“, denn wenn A gilt, dann gilt B und wenn B gilt, dann gilt sogar C.

(b) Aus „$A \Rightarrow B$“ folgt direkt die Implikation „nicht $B \Rightarrow$ nicht A“, d.h. wenn B nicht gilt, darf auch nicht A gelten (sonst hätten wir A gilt und damit auch B).

(c) Es folgt aus „$A \Rightarrow B$“ **nicht** die Implikation „nicht $A \Rightarrow$ nicht B“. Beispiele wären hierzu 1.2 b) (es könnte ja auch Sonntag sein) und d) (für $a = 2$ gilt $a \neq 4$, aber 2 ist gerade).

Beispiel 1.5. (a) Als Beispiel für 1.4 (b) betrachten wir Beispiel 1.2 (d):
Ist $a \in \mathbb{N}$ nicht gerade, dann kann a nicht 4 sein.

Wir gehen in den folgenden Beispielen davon aus, dass Füchse Hasen zum Fressen brauchen, d.h. „Füchse anwesend $\Rightarrow$ Hasen anwesend“, und Hasen benötigen Salat zum Fressen, also „Hasen anwesend $\Rightarrow$ Salat anwesend“.

(b) Sind keine Hasen vorhanden, können keine Füchse da sein, sprich „keine Hasen anwesend $\Rightarrow$ keine Füchse anwesend“.

(c) Sind Füchse anwesend, dann muss auch Salat anwesend sein
(wir folgern „Füchse $\Rightarrow$ Hasen $\Rightarrow$ Salat“).

(d) Nach vorigem Beispiel impliziert die Abwesenheit von Salat, dass es keine Füchse vor Ort gibt.

(e) Falls wir aber später einmal Füchse finden, ohne dass Salat vorhanden ist, d.h. die Implikation „Füchse $\Rightarrow$ Salat“ ist falsch, dann war bereits mindestens eine der beiden ursprünglichen Implikationen „Füchse $\Rightarrow$ Hasen“ oder „Hasen $\Rightarrow$ Salat“ falsch.

2. Lineare Gleichungssysteme

Beispiel 2.1. Wie viele Einheiten x von Salzsäure der Konzentration 12% muss man mit y Einheiten von Salzsäure der Konzentration 20% mischen, um 10 Einheiten Salzsäure der Konzentration 15% zu erhalten? Wir suchen also x und y mit:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 10 \\ 0.12x + 0.2y &= 0.15 \cdot 10 = 1.5 \end{aligned}$$

Wir können die erste Gleichung nach x auflösen: $x = 10 - y$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$1.5 = 0.12 \cdot (10 - y) + 0.2y = 1.2 - 0.12y + 0.2y = 1.2 + 0.08y,$$

also

$$y = \frac{1.5 - 1.2}{0.08} = \frac{0.3}{0.08} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3.75.$$

Somit gilt $x = 10 - y = 10 - 3.75 = 6.25$ und wir erhalten unsere Antwort: Wir müssen 6.25 Einheiten der 12%-igen Salzsäure mit 3.75 Einheiten der 20%-igen Salzsäure mischen, um 10 Einheiten von 15%-iger Salzsäure zu erhalten.

Definition 2.2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein *lineares Gleichungssystem* (oder kurz *LGS*) mit m Gleichungen und n Unbekannten hat folgende Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Hierbei sind $x_1, \ldots, x_n$ die *Unbekannten*, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ die *Koeffizienten*, und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ die "rechte Seite". Das LGS heißt *homogen*, falls $b_1 = \ldots = b_n = 0$, ansonsten heißt es *inhomogen*.

Beispiel 2.3. In Beispiel 2.1 haben wir ein inhomogenes LGS mit $m = 2$ Gleichungen und $n = 2$ Unbekannten betrachtet und gelöst. Weiterhin gilt dort $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{21} = 0.12$, $a_{22} = 0.2$, $b_1 = 10$ und $b_2 = 1.5$.

Definition 2.4. Ein Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt *Lösung* eines gegebenen LGS, wenn $x_1, \ldots, x_n$ alle Gleichungen des LGS erfüllen. Die Menge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist Lösung des LGS}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt *Lösungsmenge* des LGS.

Beispiel 2.5.

(a) Das Beispiel 2.1 hat eine eindeutige Lösung, es gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6.25 \\ 3.75 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x_1 = 1 - x_2$, einsetzen in die zweite Gleichung liefert
$$2 = 2 \cdot (1 - x_2) + 2x_2 = 2 - 2x_2 + 2x_2 = 2,$$
also keine weitere Einschränkung. Somit wird das System von allen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gelöst, für die $x_1 = 1 - x_2$ gilt, z.B. $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ oder $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$. Die vollständige (unendlich große) Lösungsmenge ist
$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1 - x_2, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir erneut $x_1 = 1 - x_2$, einsetzen in die zweite Gleichung liefert
$$4 = 2 \cdot (1 - x_2) + 2x_2 = 2 - 2x_2 + 2x_2 = 2.$$
Hier kann es also nur dann eine Lösung geben, wenn $4 = 2$ gilt, was offensichtlich nicht möglich ist. Daher hat das LGS gar keine Lösung, die (leere) Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Bemerkung 2.6.

(a) Es gibt nur drei Typen von Lösungsmengen für LGS: Die leere Menge (keine Lösung), einelementige Mengen (genau eine Lösung) und unendlich große Mengen (unendlich viele Lösungen).

(b) Ein LGS mit weniger Gleichungen als Unbekannten heißt *unterbestimmt*. Unterbestimmte Systeme haben entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

(c) Ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Daher kann der Fall $\mathbb{L} = \emptyset$ für homogene LGS nicht auftreten.

Definition 2.7. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine reelle *Matrix* mit m Zeilen und n Spalten (oder kurz $(m \times n)$-Matrix, gesprochen "m-Kreuz-n-Matrix") hat die Form
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $a_{ij} \in \mathbb{R}$ der *Eintrag* der Matrix in Zeile i und Spalte j, wobei $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Menge aller solchen Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ (auch $M(m \times n)$ oder $M_{m \times n}$). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt *quadratisch*, falls $m = n$, wenn also die Zahl ihrer Zeilen mit der Zahl ihrer Spalten übereinstimmt.

Definition 2.8. Wir schreiben das LGS aus Definition 2.2 auch in *Matrixform* als

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

mit der Matrix A aus Definition 2.7 und dem Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Ist das LGS homogen (also $b = 0$), so schreibt man oft nur A statt $(A \mid 0)$.

Beispiel 2.9.

(a) Die Matrixform des LGS aus Beispiel 2.1 ist

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0.12 & 0.2 & 1.5 \end{array}\right).$$

(b) Die Matrixformen der weiteren LGS aus Beispiel 2.5 sind

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{sowie} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

(c) Beispiel mit vier Unbekannten:

$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad\quad + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ - 2x_2 \qquad - x_4 &= 1 \\ 4x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

(d) Homogenes LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.10. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

ist besonders einfach durch "Rückwärtseinsetzen" zu lösen: Aus der dritten Zeile erhält man direkt $x_3 = \frac{-10}{-5} = 2$, die zweite Zeile liefert

$$2x_2 = 7 - 3x_3 = 7 - 3 \cdot 2 = 1,$$

also $x_2 = \frac{1}{2}$, und aus der dritten Zeile erhält man

$$8x_1 = 2 - 4x_2 + x_3 = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 2,$$

also $x_1 = \frac{1}{4}$. Die Lösungsmenge ist damit

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definition 2.11. Eine Matrix A ist in *Zeilen-Stufen-Form*, wenn die folgenden zwei Bedingungen gelten:

- Alle Nullzeilen von A sind am unteren Ende der Matrix.
- In jeder Nichtnullzeile ist der erste von Null verschiedene Eintrag (das *Pivotelement* dieser Zeile) weiter rechts als in der Zeile darüber.

Ein LGS $\left(A \mid b\right)$ ist in Zeilen-Stufen-Form, wenn A in Zeilen-Stufen-Form ist.

Beispiel 2.12. Außer dem LGS aus Beispiel 2.10 sind etwa die folgenden LGS in Zeilen-Stufen-Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 2 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Nicht in Zeilen-Stufen-Form sind etwa die folgenden LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.13. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

haben wir in Beispiel 2.10 gelöst. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat die gleiche Lösungsmenge, da die letzte Zeile (äquivalent zur Gleichung $0 = 0$) keine Einschränkung darstellt. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

hat keine Lösung, da die letzte Zeile (äquivalent zur Gleichung $0 = 1$) unerfüllbar ist. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 8 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

hat die (unendlich große) Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{4} \\ x_3 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\},$$

die auch direkt aus der Lösungsmenge des ursprünglichen LGS abgelesen werden kann (solange man auf die korrekte Position der Unbekannten achtet).

Definition 2.14. Sei ein LGS $\left(A \mid b\right)$ gegeben. Eine *elementare Zeilenumformung* ist eine der drei folgenden Operationen:

- Vertauschen zweier Zeilen.
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl **ungleich Null**.
- Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Bemerkung 2.15.

(a) Alle elementaren Zeilenumformungen sind *invertierbar*: Sie können durch elementare Zeilenumformungen rückgängig gemacht werden, um das ursprüngliche LGS zurückzubekommen.

(b) Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.

Satz 2.16. Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilen-Spalten-Form bringen. Das Standard-Verfahren dazu nennt man *Gauß-Algorithmus*.

Beispiel 2.17. Wir formen das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & -1 & 2 \\ -\frac{8}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

um, um Zeilen-Stufen-Form zu erreichen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & -1 & 2 \\ -\frac{8}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) &\xrightarrow{\text{III}\cdot 5} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ -8 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten erneut das LGS aus Beispiel 2.10.

Bemerkung 2.18. Für ein gegebenes LGS gibt es normalerweise unendlich viele Zeilen-Stufen-Formen: So sind etwa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -7 & -12 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

auch Zeilen-Stufen-Formen des LGS aus Beispiel 2.10.

Definition 2.19. Eine Matrix A ist in *reduzierter Zeilen-Stufen-Form*, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

- A ist in Zeilen-Stufen-Form.
- Das Pivotelement in jeder Nichtnullzeile ist 1.
- In jeder Spalte, die ein Pivotelement enthält, sind alle anderen Einträge Null.

Ein LGS $\left(A \mid b\right)$ ist in reduzierter Zeilen-Stufen-Form, wenn A in reduzierter Zeilen-Stufen-Form ist.

Beispiel 2.20. Keines der bisher betrachteten LGS ist in reduzierter Zeilen-Stufen-Form. Dagegen ist folgendes LGS in reduzierter Zeilen-Stufen-Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

An der reduzierten Zeilen-Stufen-Form kann man die Lösungsmenge ablesen: Die vierte Zeile trägt keine Information. Aus der dritten Zeile ($1 \cdot x_4 = 7$) erhält man sofort $x_4 = 7$. Da die dritte Spalte kein Pivotelement enthält, haben wir keine Einschränkung für x_3, also erhalten wir aus der zweiten Zeile ($x_2 - 5x_3 = 2$) direkt $x_2 = 2 + 5x_3$. Die erste Zeile ($x_1 + 4x_3 = 0$) liefert schließlich $x_1 = -4x_3$. Die Lösungsmenge ist also

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 + 5x_3 \\ x_3 \\ 7 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}.$$

Satz 2.21. Jedes LGS kann durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Zeilen-Stufen-Form gebracht werden.

Beispiel 2.22. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

aus Beispiel 2.10 ist bereits in (nicht-reduzierter) Zeilen-Stufen-Form. Nach weiteren Zeilenumformungen erreichen wir die reduzierte Zeilen-Stufen-Form, aus der wir die Lösung in diesem Fall sofort ablesen können:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}-3\cdot\text{III}]{\text{I}+\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}\cdot\frac{1}{2}]{\text{I}\cdot\frac{1}{8}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Beispiel 2.23. Ein praktischer Trick um LGS wie in Beispiel 2.20 vollständig zu lösen ist das Hinzufügen von Gleichungen vom Typ $x_j = \lambda$, falls Spalte j kein Pivotelement enthält:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Nullzeile weglassen}]{\text{Parameter wählen}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}+5\cdot\text{III}]{\text{I}-4\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -4\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+5\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge kann nun direkt aus der rechten Seite abgelesen werden:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4\lambda \\ 2+5\lambda \\ \lambda \\ 7 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 2.24. Hat ein LGS Parameter, so müssen wir bei der Multiplikation einer Zeile gegebenenfalls eine Fallunterscheidung machen: Sei etwa $a \in \mathbb{R}$ und betrachte das folgende LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + ax_2 + 2x_3 &= -1 \\ ax_1 + 2x_2 \qquad\quad &= -1 \end{aligned}$$

Wir bringen das System in Matrixform und beginnen die Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\cdot 2 - a\cdot\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & a & -2-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & a & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}\cdot 4 - a\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & a^2+2a \end{array}\right)$$

Nun ist es relevant, ob das dritte Pivotelement $4-a^2$ Null ist oder nicht. Wir betrachten also drei Fälle:

- Ist $a=2$, so vereinfacht sich das LGS zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

  Da die letzte Zeile unerfüllbar ist, folgt $\mathbb{L}=\emptyset$.

- Ist $a=-2$, so vereinfacht sich das LGS zu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}\cdot\frac{1}{4}]{\text{I}\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  und wir erhalten die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Ist $a \notin \{-2,2\}$ (und somit $4-a^2 \neq 0$), so können wir die dritte Zeile mit dem Kehrwert von $4-a^2$ multiplizieren. Mit den Nebenrechnungen

$$\begin{aligned} \frac{a^2+2a}{4-a^2} &= \frac{a(a+2)}{(2-a)(2+a)} = \frac{a}{2-a}, \\ 1+\frac{a}{2-a} &= \frac{2-a+a}{2-a} = \frac{2}{2-a} \quad \text{sowie} \\ (-2-a)-a\cdot\frac{a}{2-a} &= \frac{-(2+a)(2-a)-a^2}{2-a} = \frac{-4+a^2-a^2}{2-a} = -\frac{4}{2-a} \end{aligned}$$

erhalten wir also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 4-a^2 & a^2+2a \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{4-a^2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a & -2-a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2-a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}-a\cdot\mathrm{III}]{\mathrm{I}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{2}{2-a} \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{4}{2-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2-a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\frac{1}{4}]{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2-a} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2-a} \end{array}\right)$$

und somit die (einelementige) Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2-a} \\ -\frac{1}{2-a} \\ \frac{a}{2-a} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{2-a} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

Genereller Hinweis: Machen Sie lieber eine Fallunterscheidung zu viel als eine Fallunterscheidung zu wenig! So können Sie etwa in diesem Beispiel den Fall $a = 0$ auch separat betrachten, wenn Ihnen dadurch der weitere Lösungsweg einfacher erscheint.

3. Matrizen und Determinanten

3.1. Addition, Multiplikation und Inverse von Matrizen

Definition 3.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Einträgen $A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$.

(a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$[1] ist

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

(b) Für alle $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Einträgen $B = \big(b_{ij}\big)_{\substack{i\in\{1,\dots,m\}\\ j\in\{1,\dots,n\}}}$ ist

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

(c) Für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ mit Einträgen $B = \big(b_{ij}\big)_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,\ell\}}}$ ist $C = A\cdot B \in \mathbb{R}^{m\times\ell}$ die Matrix mit Einträgen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

für $i \in \{1,\dots,m\}$ und $j \in \{1,\dots,\ell\}$. Der Multiplikationspunkt wird oft weggelassen, man schreibt AB für $A\cdot B$.

Beispiel 3.2. (a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-3) \\ 3+\frac{1}{2} & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

gilt

$$5A = 5\cdot A = 5\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot(-1) & 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} AB = A\cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 2 & 1\cdot 1+1\cdot(-3) \\ (-1)\cdot 2+3\cdot 0 & (-1)\cdot 0+3\cdot 2 & (-1)\cdot 1+3\cdot(-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}. \end{aligned}$$

Weder $A+B$ noch $B\cdot A$ sind in diesem Fall definiert.

[1] Im Kontext von Matrizen spricht man von einer reellen Zahl auch als *Skalar*.

Bemerkung 3.3. Für Matrizen A, B und C mit zueinander passenden Größen gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) Die Addition von Matrizen ist *assoziativ*:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

(b) Die Addition von Matrizen ist *kommutativ*:

$$A + B = B + A.$$

(c) Die Multiplikation von Matrizen ist assoziativ:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(d) **Aber:** Die Multiplikation von Matrizen ist **nicht** kommutativ: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA,$$

die Reihenfolge der Matrizen ist bei der Multiplikation also sehr wichtig.

(e) Für Matrizen gelten die *Distributivgesetze*:

$$A \cdot (B + C) = AB + AC \quad \text{und} \quad (A + B) \cdot C = AC + BC.$$

Bemerkung 3.4. Ein Spezialfall der Matrix-Matrix-Multiplikation ist die Matrix-Vektor-Multiplikation: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen (Spalten-)Vektor $x \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$ erhalten wir wieder einen Vektor $Ax \in \mathbb{R}^m$.

Somit kann man ein System von linearen Gleichungen als eine matrixwertige Gleichung schreiben: Die Lösungen eines LGS $\left(A \mid b\right)$ entsprechen genau den Lösungen x der Gleichung $Ax = b$.

Beispiel 3.5. Das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

aus Beispiel 2.10 entspricht der matrixwertigen Gleichung

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.6. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die von A *induzierte Abbildung* ist die Funktion

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Beispiel 3.7. Von Matrizen induzierte Abbildungen beschreiben Transformationen von Vektoren: Die von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

induzierte Abbildung dreht jeden[2] zweidimensionalen Vektor um 90° gegen den Uhrzeigersinn:

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Im $\mathbb{R}^3$ induziert

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an der x_2-x_3-Ebene:

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.8. Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Die $(m \times n)$-Matrix, deren Einträge alle Null sind, heißt *Nullmatrix* und wird mit $0_{m\times n}$ bezeichnet. Wenn das Format der Nullmatrix aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft nur 0 statt $0_{m\times n}$.

(b) Eine $(n \times n)$-Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

die also abseits der Hauptdiagonalen nur Nullen hat, heißt *Diagonalmatrix*.

(c) Die spezielle Diagonalmatrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt *Einheitsmatrix*. Außer mit I_n wird sie auch mit E_n oder 1_n bezeichnet. Auch hier gilt: Wenn das Format der Einheitsmatrix aus dem Zusammenhang klar ist, schreibt man oft nur I statt I_n.

[2] Der Nullvektor wird – wie bei jeder von einer Matrix induzierten Abbildung – wieder auf sich selbst abgebildet: Da er Länge Null hat, "sieht" man ihm die Rotation nicht an.

Beispiel 3.9. Es gilt

$$0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0_{5\times 5}$$

sind A und $0_{5\times 5}$ Diagonalmatrizen, B ist keine Diagonalmatrix.

Bemerkung 3.10. Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann gelten

$$A + 0_{m\times n} = A, \quad A \cdot 0_{n\times k} = 0_{m\times k}, \quad 0_{k\times m} \cdot A = 0_{k\times n}, \quad A \cdot I_n = A \quad \text{und} \quad I_m \cdot A = A.$$

Definition 3.11. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, die $A \cdot B = I_n$ und $B \cdot A = I_n$ erfüllt. Die Matrix B heißt dann *Inverse* von A, man schreibt dann $B = A^{-1}$.

Bemerkung 3.12.

(a) Ist A invertierbar, so ist ihre Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt.

(b) Wenn eine der beiden Gleichungen $A \cdot B = I_n$ und $B \cdot A = I_n$ erfüllt ist, ist die andere automatisch auch erfüllt.

(c) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch $A \cdot B$ invertierbar und es gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Beispiel 3.13.

(a) Es gilt $I_n^{-1} = I_n$, da offensichtlich $I_n \cdot I_n = I_n$.

(b) Die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

da

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(und damit auch $B \cdot A = I_2$). Somit können wir schreiben

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wegen $A \cdot 0_{n\times n} = 0_{n\times n} \neq I_n$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann die Nullmatrix nicht invertierbar sein. Weitere nicht invertierbare Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Satz 3.14.

(a) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn das homogene LGS $\big(A \mid 0\big)$ (oder $Ax = 0$) nur die triviale Lösung $x = 0$ hat.

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ das LGS $\big(A \mid b\big)$ (oder $Ax = b$) eindeutig lösbar, die Lösung ist $x = A^{-1} \cdot b$.

Beispiel 3.15. Das LGS

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 \qquad + 2x_3 &= -6 \\ 3x_1 - x_2 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

entspricht der Matrixgleichung $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen ($A \cdot A^{-1} = I$) zeigt, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

die Inverse von A ist. Somit hat $Ax = b$ die (eindeutige) Lösung

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

was sich durch eine Probe leicht bestätigen lässt.

Algorithmus 3.16. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Anhand der folgenden Schritte lässt sich überprüfen, ob A invertierbar ist, und bei positiver Antwort die Inverse ausrechnen:

(1) Konstruiere das "erweiterte" LGS

$$\big(A \mid I_n\big) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(2) Bringe das LGS auf Zeilen-Stufen-Form, wende dabei alle Zeilenumformungen auch auf der rechten Seite an. Dies führt auf ein System der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n & * & \dots & * & * \end{array}\right),$$

wobei $*$ schematisch für beliebige Einträge steht.

(3) Falls mindestens eine Zahl aus $d_1, \dots, d_n$ Null ist, ist A nicht invertierbar und die Rechnung kann an dieser Stelle beendet werden. Falls alle Zahlen $d_1, \dots, d_n$ von Null verschieden sind, bringe das System auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form, die folgende Gestalt haben wird:

$$(I_n \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Dann gilt $A^{-1} = B$.

Beispiel 3.17. Wir berechnen die Inverse der Matrix A aus Beispiel 3.15:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}\cdot 3-2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da die Diagonalelemente -3, -2 und 2 alle von Null verschieden sind, ist A invertierbar und wir fahren fort:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow[\mathrm{II}-\mathrm{III}]{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\mathrm{I}\cdot 2+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\frac{1}{2}]{\substack{\mathrm{I}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) \\ \mathrm{II}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Die Inverse von A ist also in der Tat

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.2. Determinanten

Beispiel 3.18. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Falls $ad - bc \neq 0$, so ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

was eine Probe leicht bestätigt.

Definition 3.19. Für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt $\det(A) \in \mathbb{R}$ die *Determinante* von A. Für kleine n lassen sich kompakte Formeln für $\det(A)$ hinschreiben:

(a) Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ gilt $\det(A) = a_{11}$.

(b) Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(c) Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Für größere n siehe Satz 3.24.

Beispiel 3.20.

(a) Es gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \cdot b - 0 \cdot 0 = ab,$$

also insbesondere $\det(0_{2\times 2}) = 0$ und $\det(I_2) = 1$.

(c) Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) \\ &\qquad - 1 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot 0 - (-3) \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 0 + 0 - 2 - 0 - 0 + 18 = 16. \end{aligned}$$

(d) Betrachte die nicht-invertierbaren Matrizen aus Beispiel 3.13: Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 5 - 6 \cdot 7 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 45 + 60 + 84 - 75 - 42 - 72 = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.21. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b) Im Allgemeinen gilt $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, schon bei $n = 2$ hat man etwa

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Ist A invertierbar, so gilt $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$.

Satz 3.22. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent[3]:

(1) Es gilt $\det(A) \neq 0$.

(2) Die Matrix A ist invertierbar.

(3) Das homogene LGS $Ax = 0_{n\times 1}$ hat nur die triviale Lösung $x = 0_{n\times 1}$.

(4) Für alle $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar.

Beispiel 3.23.

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aus Beispiel 3.20 wissen wir, dass $\det(A) = 0$. Wegen Satz 3.22 können wir schließen, dass A nicht invertierbar ist (wie in Beispiel 3.13 nur behauptet wurde).

(b) Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

gilt laut Beispiel 3.20 $\det(A) = 16$, also ist A laut Satz 3.22 invertierbar, das homogene LGS

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist die eindeutige Lösung von $Ax = b$ gegeben durch $x = A^{-1}b$.

[3] Äquivalent heißt hier: Entweder sind alle Aussagen gleichzeitig wahr oder alle sind gleichzeitig falsch.

Satz 3.24 (Entwicklungssatz von Laplace)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Bezeichne mit $\hat{A}^{(i,j)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht. Dann kann $\det(A)$ auf folgende Arten berechnet werden:

(a) Entwicklung nach der i-ten Zeile: Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\hat{A}^{(i,j)}).$$

(b) Entwicklung nach der j-ten Spalte: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(\hat{A}^{(i,j)}).$$

Beispiel 3.25. Es bietet sich immer an, nach Zeilen oder Spalten zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthalten: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

entwickeln wir nach der dritten Zeile, dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \overbrace{A_{13}}^{=2} \cdot \overbrace{(-1)^{3+1}}^{=1} \cdot \det(\hat{A}^{(3,1)}) + \overbrace{A_{32}}^{=4} \cdot \overbrace{(-1)^{3+2}}^{=-1} \cdot \det(\hat{A}^{(3,2)}) \\ &\quad + \underbrace{A_{33}}_{=0} \cdot (-1)^{3+3} \det(\hat{A}^{(3,3)}) + \underbrace{A_{34}}_{=0} \cdot (-1)^{3+4} \det(\hat{A}^{(3,4)}) \\ &= 2 \cdot \det(\hat{A}^{(3,1)}) - 4 \cdot \det(\hat{A}^{(3,2)}) \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun kann man die Determinanten der beiden (3×3)-Matrizen weiter entwickeln oder anderweitig ausrechnen. Auf jeden Fall gilt

$$\det(\hat{A}^{(3,1)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -7 \quad \text{und} \quad \det(\hat{A}^{(3,2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5,$$

also erhält man abschließend

$$\det(A) = 2 \cdot \det(\hat{A}^{(3,1)}) - 4 \cdot \det(\hat{A}^{(3,2)}) = 2 \cdot (-7) - 4 \cdot (-5) = -14 + 20 = 6.$$

Definition 3.26. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{heißt} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

transponierte Matrix oder *Transponierte* zu A.

- Eine (quadratische) Matrix A mit $A = A^T$ heißt *symmetrisch*.
- Eine invertierbare Matrix A mit $A^{-1} = A^T$ heißt *orthogonal*.

Beispiel 3.27. Beim Transponieren werden die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich entsteht die Transponierte durch das Spiegeln der ursprünglichen Matrix an der Hauptdiagonalen.

Bemerkung 3.28. Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(A^T) = \det(A)$, da etwa nach der k-ten Zeile von A^T zu entwickeln das Gleiche ist, wie nach der k-ten Spalte von A zu entwickeln.

Definition 3.29. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls alle Einträge von A **unterhalb** der Hauptdiagonalen Null sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Analog heißt A *untere Dreiecksmatrix*, wenn alle Einträge von A **oberhalb** der Hauptdiagonalen Null sind.

Bemerkung 3.30. Ist A eine obere Dreiecksmatrix wie in Definition 3.29, so gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Da Diagonalmatrizen spezielle obere Dreiecksmatrizen sind, ist die Determinante einer Diagonalmatrix also gerade das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen. Insbesondere ist eine Diagonalmatrix genau dann invertierbar, wenn alle Elemente auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind.

Beispiel 3.31.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\det(I_n) = 1$ und $\det(0_{n \times n}) = 0$.

(b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$

(c) $\det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 1 = 0.$

Bemerkung 3.32. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei B durch eine elementare Zeilenumformung aus A hervorgeht: $A \xrightarrow{U} B$.

(a) Ist U eine Vertauschung zweier Zeilen, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen: Es gilt $\det(A) = -\det(B)$.

(b) Ist U die Multiplikation einer Zeile mit dem Faktor $\lambda \neq 0$, so ändert sich die Determinante um den Kehrwert dieses Faktors: Es gilt $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \det(B)$.

(c) Ist U die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht: Es gilt $\det(A) = \det(B)$.

Beispiel 3.33. Beim Überführen einer quadratischen Matrix in Zeilen-Stufen-Form kann die Determinante mitberechnet werden. Dabei notieren wir den Änderungsfaktor in jedem Umformungsschritt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\det \cdot (-1)]{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\det \cdot \frac{1}{3}]{\mathrm{III} \cdot 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\det \cdot 1]{\mathrm{III} + \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit der Formel für obere Dreiecksmatrizen aus Bemerkung 3.30 gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-8) = -48.$$

Wegen Bemerkung 3.32 gilt also (vergleiche Beispiel 3.20)

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} &= (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{3} \cdot (-48) = 16.
\end{aligned}$$

4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 4.1. Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *linear*, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

- Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $g(v + w) = g(v) + g(w)$. (Additivität)
- Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $g(a \cdot v) = a \cdot g(v)$. (Homogenität)

Bemerkung 4.2. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die induzierte Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ v \mapsto A \cdot v$$

aus Definition 3.6 eine lineare Abbildung. Andererseits ist aber auch jede lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von einer Matrix induziert, nämlich von

$$\begin{pmatrix} g\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} & g\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} & \cdots & g\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Somit kann man jede Matrix eindeutig mit der von ihr induzierten Abbildung identifizieren. Insbesondere wird im Folgenden oft kein Unterschied zwischen den Konzepten "Matrix" und "lineare Abbildung" gemacht.

Bemerkung 4.3. Die geometrische Wirkung von Matrizen ist nur in wenigen Situationen (wie etwa in Beispiel 3.7) klar erkennbar. Daher ist es ein erster Schritt, die einfachste Wirkung zu untersuchen: Ein Vektor wird (von einer quadratischen Matrix) nur in seiner Länge *skaliert*, also gestreckt oder gestaucht.

Definition 4.4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von A, falls ein $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit
$$Av = \lambda v.$$
- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so heißen alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = \lambda v$ *Eigenvektoren* von A zu λ. Die Menge
$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}$$
aller Eigenvektoren von A zu λ heißt *Eigenraum* zu λ.

Beispiel 4.5.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wegen

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

sind 1 und 2 Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ beziehungsweise $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Allerdings ist 0 kein Eigenwert von A, da außer dem Nullvektor kein Vektor v die Gleichung $Av = 0 \cdot v = 0$ erfüllt (dies sieht man etwa an der Determinante von A).

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wegen

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

sind 2 und 0 Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beziehungsweise $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Aber auch $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zu 0.

Bemerkung 4.6. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Sind $v, w \in E_\lambda$, so gilt auch $v + w \in E_\lambda$.

(b) Ist $v \in E_\lambda$, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ auch $a \cdot v \in E_\lambda$.

Informell gesprochen: Summen von Eigenvektoren und skalare Vielfache von Eigenvektoren sind wieder Eigenvektoren.[4] Insbesondere enthält jeder Eigenraum unendlich viele Eigenvektoren.

Bemerkung 4.7. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Eigenwertgleichung

$$A \cdot v = \lambda \cdot v = \lambda \cdot I_n \cdot v \quad \text{äquivalent zu} \quad (\lambda I_n - A) \cdot v = 0.$$

Definition 4.8. Zu jedem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir das *charakteristische Polynom* von A als

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Satz 4.9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A.

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so ist E_λ genau die Lösungsmenge von $(\lambda I_n - A)x = 0$.

Beispiel 4.10.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) &= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 3 & \lambda-4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-4) + 6 = \lambda^2 + \lambda - 4\lambda - 4 + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2), \end{aligned}$$

also hat A die Eigenwerte 1 und 2. Wegen

$$\begin{aligned} 1 \cdot I_n - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathrm{II} - \frac{3}{2}\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{\text{Parameter wählen} \\ \text{Nullzeile weglassen}}]{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \end{aligned}$$

[4]Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum*, wenn sie genau diese Bedingungen erfüllt: $v + w \in U$ und $a \cdot v \in U$ für alle $v, w \in U$ und alle $a \in \mathbb{R}$. Deswegen heißt E_λ Eigenraum und nicht nur Eigenmenge.

gilt also

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Analog erhält man aus

$$2 \cdot I_n - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \to \ldots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

auch

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2), \end{aligned}$$

also hat A die Eigenwerte 0 und 2.

(c) Die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $d_1, \ldots, d_n$, denn

$$\begin{aligned} \chi_D(\lambda) = \det(\lambda I_n - D) &= \det\begin{pmatrix} \lambda - d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda - d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda - d_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - d_1) \cdot (\lambda - d_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - d_n). \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor von D zu d_j ist die j-te Spalte von I_n.

Definition 4.11. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Die *algebraische Vielfachheit* $a(\lambda) \in \mathbb{N}$ von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A.
- Die *geometrische Vielfachheit* $g(\lambda) \in \mathbb{N}$ von λ ist die Anzahl der Freiheitsgrade im Eigenraum E_λ, also die (minimale) Anzahl von Parametern, die man braucht, um den Eigenraum E_λ zu beschreiben.

Beispiel 4.12. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

hat charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2.$$

Die Eigenwerte von A sind also 2 und 3 mit algebraischen Vielfachheiten $a(2) = a(3) = 2$. Wegen

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

erhält man die geometrischen Vielfachheiten $g(2) = 2$ und $g(3) = 1$.

Bemerkung 4.13. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Das Polynom χ_A hat Grad n und ist normiert (der Vorfaktor von λ^n ist 1).

(b) Die Matrix A hat höchstens n Eigenwerte (mit algebraischen Vielfachheiten gezählt).

(c) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A gilt $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$: Die geometrische Vielfachheit ist immer mindestens 1 und höchstens so groß wie die algebraische Vielfachheit.

Beispiel 4.14. Die Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat keine (reellen) Eigenwerte, da

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

keine (reellen) Nullstellen hat.

Satz 4.15. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (d.h. „$a) \iff b)$“):

(a) $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n$

(b) Es existieren n Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ von A, sodass die Matrix $U := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ invertierbar ist und $U^{-1}AU = D$ eine Diagonalmatrix ist.

Wenn A eine der beiden (und damit auch die andere) Aussagen erfüllt, nennt man A diagonalisierbar. Die Einträge in D sind dann gerade die Eigenwerte der v_i und damit die Eigenwerte von A mit entsprechenden Vielfachheiten.

Bemerkung 4.16. Gilt $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n$, können wir die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ in Satz 4.15 (b) wie folgt berechnen: Für jeden Eigenwert λ bringen wir $\lambda I_n - A$ in reduzierte Zeilen-Stufen-Form $\tilde{A}_\lambda$. Seien $i_1, \dots, i_l$ die Spalten von $\tilde{A}_\lambda$ die kein Pivot-Element enthalten. Indem wir die Einträge $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ als Parameter wählen, erhalten wir wie in Kapitel 1 die homogene Lösungsmenge von $(\lambda I_n - A \mid 0)$. Setzen wir immer genau ein $x_{i_s} = 1$ und alle anderen Parameter $x_{i_t} = 0$, erhalten wir also $l = g(\lambda)$ verschiedene Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Insgesamt erhalten wir für alle Eigenwerte damit $n = \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i)$ verschiedene Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$. Die Matrix $U := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ ist automatisch invertierbar und erfüllt Teil b) von Satz 4.15.

Beispiel 4.17. (a) Wenn die algebraischen und damit die geometrischen Vielfachheiten alle 1 sind (das ist in der Anwendung meist der Fall), dann erhält man für eine diagonalisierbare Matrix je einen Eigenvektor (und seine Vielfachen) pro Eigenwert. Z.B. für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

hatten wir die Eigenräume $\mathrm{Eig}(A, 2) = \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\mathrm{Eig}(A, 3) = \{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ berechnet. Damit ist $U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar und nach der Formel für Inverse von 2×2-Matrizen ist $U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix})$. Ausrechnen liefert $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als charakteristische Polynom erhalten wir (mit Entwicklung nach der ersten Spalte und anschließend Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot I_4 - A) = \det(\begin{pmatrix} X-1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & X \end{pmatrix})$$

$$= (X-1)\det(\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 3 & 1 & X \end{pmatrix}) = (X-1)^2 \det(\begin{pmatrix} X-1 & 0 \\ 1 & X \end{pmatrix}) = (X-1)^3 X$$

Also haben wir die Eigenwerte 1 und 0 mit algebraischen Vielfachheiten $a(1) = 3$ und $a(0) = 1$. Für die Eigenräume erhalten wir:

$\mathrm{Eig}(A, 1)$:

$$(1 \cdot I_4 - A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {}^{1} \\ \\ \\ {}_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid : (-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Eig}(A,1) = \{x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix} \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \text{ und } g(1) = 3$$

$\operatorname{Eig}(A,0)$:

$$(1 \cdot I_4 - A) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}-1 & -3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ {}^{3} \\ \\ {}_{+} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & -3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{+} \\ \\ {}^{1} \quad {}_{-1} \\ {}_{+} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{+} \mid \cdot(-1) \\ {}_{-3} \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} {}^{+} \\ {}_{3} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Eig}(A,0) = \{x_4 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Wir nehmen also für den Eigenwert 1 die Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}0\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\-1/3\\0\\1\end{pmatrix}$$

und für den Eigenwert 0 den Eigenvektor $v_4 := \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Als Matrix ergibt sich dann $U := (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Die Inverse dazu lässt sich wie üblich ausrechnen und ist $U^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Ein Test ergibt

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,1,1,0)$$

Wir können die Diagonalisierbarkeit benutzen um leicht Potenzen von Matrizen zu berechnen: Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ gilt. Weiterhin folgt aus $A = UDU^{-1}$ bereits

$$A^k = UD\underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=I_n}DU^{-1} \cdot \dots \cdot UDU^{-1} = UDI_nDI_n \cdot \dots \cdot DU^{-1} = UD^kU^{-1}.$$

Eine Anwendung hiervon ist das Umwandeln von rekursiv definierten Folgen zu expliziter Darstellung.

Beispiel 4.18. Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$a_0 := 0, a_1 := 1 \text{ und für } n \in \mathbb{N} \text{ist } a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$$

d.h. jedes weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger. Wir wollen nun durch Diagonalisieren eine explizite Formel „$a_n = ?$ “ finden. Hierzu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}$$

die zwei Folgenelemente auf ihre nachfolgenden Elemente abbildet. Diese ist linear und wir können sie als Matrizenmultiplikation betrachten:

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n + a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{A:=}\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a_n\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = A \cdot A\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{pmatrix} = \dots = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n-mal} \cdot \begin{pmatrix}a_1\\ a_0\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Wir wollen also A diagonalisieren. Wir gehen vor wie immer: $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1$ hat als Nullstellen:

$$\begin{aligned} X^2 - X - 1 = 0 &\iff (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 1\\ &\iff (X - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}\\ &\iff X - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\\ &\iff X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Also haben wir die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Den Eigenwert $\lambda_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kennt man auch als den goldenen Schnitt. Der Einfachheit halber benutzen wir die beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1$$

Für die Eigenräume erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Eig}(A, \lambda_i): \\
&\lambda_i I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda_i - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i^2 - \lambda - 1 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (\text{ da } \lambda_i^2 - \lambda - 1 = \chi_A(\lambda_i) = 0) \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \{t \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also für $U := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse $U^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Wir testen nochmal unsere Diagonalisierung nach (das braucht man eigentlich nicht unbedingt zu machen):

$$
\begin{aligned}
U^{-1}AU &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & \lambda_2 + 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2 + 1 - \lambda_2^2 \\ -\lambda_1 - 1 + \lambda_1^2 & -\lambda_2 - 1 + \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \qquad (\begin{matrix} \lambda_2 + 1 - \lambda_2^2 = -\chi_A(\lambda_2) = 0 \\ -\lambda_1 - 1 + \lambda_1^2 = \chi_A(\lambda_1) = 0 \end{matrix}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eine kleine Nebenrechnung ergibt

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} \cdot \lambda_1 &= \frac{\sqrt{5} + 5}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 2 = \lambda_1 + 2 \\
\text{und } \sqrt{5}\lambda_2 &= \frac{\sqrt{5} - 5}{2} = -\lambda_2 - 2
\end{aligned}
$$

Oben eingesetzt erhalten wir also tatsächlich $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D$ und damit $A = UDU^{-1}$. Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (UDU^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = UD^nU^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow a_n &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

5. Komplexe Zahlen

Bemerkung 5.1. Die Suche nach Lösungen für (polynomielle) Gleichungen ist eine natürlich Motivation für *Zahlbereichserweiterungen*:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*.
  Problem: $1 + \lambda = 1$.

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen und der Null.
  Lösung des vorherigen Problems: $\lambda = 0 \in \mathbb{N}_0$.
  Neues Problem: $1 + \lambda = 0$.

- $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*.
  Lösung des vorherigen Problems: $\lambda = -1 \in \mathbb{Z}$.
  Neues Problem: $2\lambda - 1 = 0$.

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen*.
  Lösung des vorherigen Problems: $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.
  Neues Problem: $\lambda^2 - 2 = 0$.

- $\mathbb{R}$ ist die Menge der *reellen Zahlen* (realisiert durch endliche oder unendliche Dezimalzahlen).
  Lösung des vorherigen Problems: $\lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
  Neues Problem: $\lambda^2 + 1 = 0$.

Definition 5.2. Die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* besteht aus allen Objekten der Form

$$z = a + b\mathrm{i} = a + \mathrm{i}b \quad \text{wobei} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist i die *imaginäre Einheit*, deren definierende Eigenschaft ist, dass sie die Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ löst[5]: Es gilt

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

- Der *Realteil* von $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$.

- Der *Imaginärteil* von $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$.

- Der *Betrag* oder *Modulus* von $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.

- Die zu $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ *komplex konjugierte* Zahl ist $\overline{z} = a - b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

Sind nun $z = a + b\mathrm{i}$ und $w = c + d\mathrm{i}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so ist die Summe gegeben durch

$$z + w = (a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

und ihr Produkt ist

$$z \cdot w = (a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

[5] Vergleichbar etwa mit der reellen Zahl $\sqrt{2}$, deren definierende Eigenschaft ist, dass sie die eindeutige positive Lösung der Gleichung $\lambda^2 - 2 = 0$ ist.

Beispiel 5.3.

(a) Es ist $z = 4 + \sqrt{2}\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl mit Realteil 4, Imaginärteil $\sqrt{2}$ und Betrag

$$|z| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{16+2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Das komplex Konjugierte zu z ist $\overline{z} = 4 - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

(b) Für $z = -7$ gilt $\mathrm{Re}(z) = 7$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\overline{z} = 7 = z$ und $|z| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7$.

(c) Es gilt $3\mathrm{i} + (-2 - 3\mathrm{i}) = -2$ und

$$\underbrace{3\mathrm{i}}_{=0+3\mathrm{i}} \cdot (-2 - 3\mathrm{i}) = (0 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3)) + (0 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2))\mathrm{i} = 9 - 6\mathrm{i}.$$

(d) Es gilt $(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 4 + \mathrm{i}$ und

$$(3 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - \mathrm{i}) = (3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) + (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1))\mathrm{i} = 5 - \mathrm{i}.$$

Bemerkung 5.4.

(a) Die Formel für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen folgt durch normales Ausmultiplizieren zusammen mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$z \cdot w = (a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

(b) Man kann mit komplexen Zahlen fast genauso rechnen wie mit reellen Zahlen: Sowohl Addition als auch Multiplikation sind assoziativ und kommutativ; auch die Distributivgesetze gelten. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ gibt es auf $\mathbb{C}$ allerdings keine sinnvolle Anordnung: Eine Aussage wie $\mathrm{i} > 0$ führt schnell zu Widersprüchen und ist damit nicht zulässig.

(c) Ist $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z \neq 0$, so ist z invertierbar mit

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

Beispiel 5.5. Es gilt

$$\frac{1}{3 - 4\mathrm{i}} = \frac{\overline{3 - 4\mathrm{i}}}{3^2 + (-4)^2} = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

und

$$\frac{1 - \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}} = (1 - \mathrm{i}) \cdot \frac{1}{3 - 2\mathrm{i}} = (1 - \mathrm{i}) \cdot \frac{\overline{3 - 2\mathrm{i}}}{3^2 + 2^2} = \frac{(1 - \mathrm{i}) \cdot (3 + 2\mathrm{i})}{13} = \frac{5 - \mathrm{i}}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}\mathrm{i}.$$

Bemerkung 5.6. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

(b) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

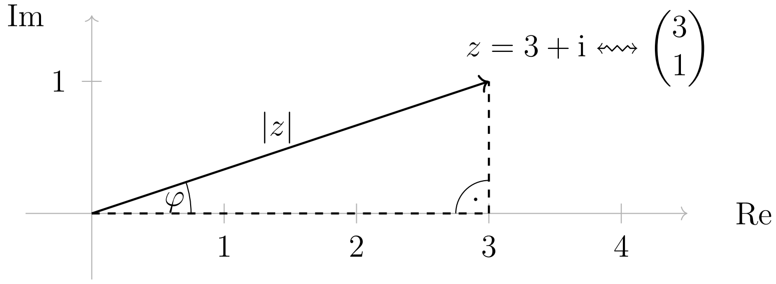
(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$. (Dreiecksungleichung)

(d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(e) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(f) $\overline{(\overline{z})} = z$.

Bemerkung 5.7. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so kann man die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifizieren und dementsprechend als Element der *komplexen Ebene* interpretieren:



Über den Satz des Pythagoras erhält man dann die Länge des Vektors als $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Der Winkel[6] φ, den der Vektor zur reellen Achse bildet, nennt man auch das *Argument* von z. Da Winkel periodisch mit Periode 2π sind (also etwa 3π, π und $-\pi$ den gleichen Winkel repräsentieren), vereinbaren wir, dass wir einen Winkel φ in konkreten Beispielen immer im Bereich von $0 \leq \varphi < 2\pi$ angeben. Somit kann man jede komplexe Zahl außer Null eindeutig in der sogenannten *Polardarstellung* schreiben:

$$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)).$$

Man erhält φ durch Ablesen oder durch Lösen der (elementargeometrischen) Gleichungen

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad \text{beziehungsweise} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Besonders hilfreich ist die Polardarstellung bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen: Für $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)), w = |w| \cdot (\cos(\psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\psi)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt aufgrund der Additionstheoreme von Sinus und Kosinus

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \psi))$$

(die Beträge multiplizieren sich, die Argumente addieren sich). Wegen

$$\overline{w} = |w| \cdot (\cos(-\psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\psi))$$

gilt dann auch

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi - \psi)).$$

[6] Beachten Sie auch Anhang A.6 zur Darstellung der Winkel.

Beispiel 5.8.

(a) Es gilt $\mathrm{i} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(b) Es gilt $-2 + 2\mathrm{i} = \sqrt{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$.

(c) Für $z = -2 + \mathrm{i}\sqrt{12}$ gilt $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{16} = 4$, also

$$z = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Wegen

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

erhält man $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ durch Ablesen aus Abbildung 6 und damit

$$z = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

und wegen $2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ auch

$$\overline{z} = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right).$$

(d) Für $z = 1 + \mathrm{i}$ und $w = -2 + 2\mathrm{i}$ gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (1 + \mathrm{i}) \cdot (-2 + 2\mathrm{i}) \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) \cdot \sqrt{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= 4 \cdot (\cos(\pi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi)) = 4 \cdot (-1 + \mathrm{i} \cdot 0) = -4. \end{aligned}$$

Satz 5.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Bemerkung 5.10. Mittels Polynomdivision folgt aus dem Hauptsatz auch, dass jedes (von Null verschiedene) komplexe Polynom genau so viele komplexe Nullstellen (mit Vielfachheiten) hat wie sein Grad angibt.

Beispiel 5.11. Es gilt $z^2 - (4 + \mathrm{i})z + (5 - \mathrm{i}) = (z - (3 + 2\mathrm{i}))(z - (1 - \mathrm{i}))$.

Bemerkung 5.12. Sei p ein Polynom mit reellwertigen Koeffizienten.

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von p. Echt komplexe Nullstellen treten hier also immer nur in komplex konjugierten Paaren auf.

(b) Ist $\mathrm{grad}(p)$ ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

Bemerkung 5.13. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, dann ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A. Weiterhin gilt

$$E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_\lambda}$$

in folgendem Sinne: Ist

$$E_\lambda = \{w_1 \cdot v_1 + \ldots + w_k \cdot v_k \mid w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{C}\}$$

für geeignete Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$, so gilt

$$E_{\overline{\lambda}} = \{w_1 \cdot \overline{v_1} + \ldots + w_k \cdot \overline{v_k} \mid w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{C}\},$$

wobei im Ausdruck $\overline{v_j}$ die komplexe Konjugation auf jeden Eintrag des Vektors v_j angewendet wird.

(b) Ist n ungerade, so hat A mindestens einen reellen Eigenwert.

Beispiel 5.14. Aus Beispiel 4.14 wissen wir, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

keine reellen Eigenwerte hat. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

hat A allerdings die komplexen Eigenwerte i und $-$i. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{i} \cdot I_2 - A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}} \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathrm{II} + \mathrm{i} \cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\substack{\text{Parameter wählen} \\ \text{Nullzeilen weglassen}}]{\mathrm{I} \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & w \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{\mathrm{I} + \mathrm{i} \cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathrm{i}w \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)
\end{aligned}$$

erhält man die komplexen Eigenräume

$$E_{\mathrm{i}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i}w \\ w \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w \mid w \in \mathbb{C} \right\}$$

und

$$E_{-\mathrm{i}} = \overline{E_{\mathrm{i}}} = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot w \mid w \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{\mathrm{i}} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \cdot w \mid w \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot w \mid w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Bemerkung 5.15. Laut dem Fundamentalsatz ist jede quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten lösbar. Dafür kann man ein Verfahren verwenden, das die klassische p-q-Formel verallgemeinert.

(a) Sei also $z^2 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$, dann hat man mit quadratischer Ergänzung

$$0 = z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

also

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

An der *Diskriminante* $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \in \mathbb{C}$ entscheidet sich das weitere Vorgehen:

- Für $\Delta = 0$ ist $z = -\frac{p}{2}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$ mit Vielfachheit 2.
- Für $\Delta \neq 0$ gibt es laut Polardarstellung $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und

$$\Delta = r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)).$$

Aufgrund der Rechenregeln für Polardarstellungen in Bemerkung 5.7 ist nun

$$w = \sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

eine Zahl mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right)^2 \\ &= \sqrt{r}^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)) = \Delta, \end{aligned}$$

die andere ist

$$\begin{aligned} -w &= -\sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) \end{aligned}$$

(die Umformung zwischen den beiden Darstellungen kann man mit Satz A.15 erreichen). Insbesondere gilt nun

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \Delta = w^2,$$

also hat man für die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ die Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm w,$$

wobei w eine "Wurzel" aus der Diskriminante $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ist.

(b) Im Spezialfall $z^2 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ vereinfacht sich das Verfahren: Mit $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen gegeben durch

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}, & \text{falls } \Delta \geq 0, \\ -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{\Delta} \in \mathbb{C}, & \text{falls } \Delta < 0. \end{cases}$$

6. Folgen und Reihen

6.1. Folgen

Definition 6.1. Eine (reellwertige) *Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$ ist eine von natürlichen Zahlen n durchnummerierte Liste von reellen Zahlen a_n. Anders ausgedrückt: Eine Folge ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Hierbei nennt man a_n auch das n-te *Folgenglied*, n heißt *Folgenindex*.

Beispiel 6.2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Für $a_n = n$ sind die ersten Folgenglieder $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Hierbei werden die Folgenglieder immer größer, die Folge "nähert" sich Unendlich an.

(b) Für $a_n = \frac{1}{n}$ sind die ersten Folgenglieder $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Hierbei werden die Folgenglieder immer kleiner, die Folge "nähert" sich der Null an.

(c) *Konstante Folge*: Für $a_n = c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$ sind die ersten Folgenglieder $c, c, c, c, c, \ldots$ Hierbei sind alle Folgenglieder gleich, die Folge "nähert" sich also c an.

(d) *Alternierende Folge*: Für

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

sind die ersten Folgenglieder $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ Hierbei haben zwei aufeinanderfolgende Glieder einen festen Abstand, die Folge "nähert" sich keinem Wert an.

Definition 6.3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Die Folge heißt *beschränkt*, falls es eine *Schranke* $M > 0$ gibt, so dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (also $-M < a_n < M$).

(b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ heißt *konvergent* gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle Abstände $\varepsilon > 0$ einen Folgenindex $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Die Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge, geschrieben

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim\nolimits_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Man sagt auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a *konvergiert*.

(c) Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt *Nullfolge*.

(d) Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

(e) Eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$), falls es für jede Schranke $M > 0$ einen Folgenindex $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n \geq M \quad \text{für alle} \quad n \geq N \quad (\text{bzw.} \quad a_n \leq -M \quad \text{für alle} \quad n \geq N).$$

Man schreibt entsprechend $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

(f) Divergente Folgen, die nicht bestimmt divergent sind, heißen *unbestimmt divergent.*

Beispiel 6.4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Für $a_n = n$ divergiert die Folge bestimmt gegen ∞: Sei eine Schranke $M > 0$ gegeben. Wähle ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ mit $N > M$, dann gilt

$$a_n = n \geq N > M \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Für $a_n = \frac{1}{n}$ ist die Folge eine Nullfolge: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ beliebig mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (also umgekehrt $\frac{1}{N} < \varepsilon$), dann gilt

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Für $a_n = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist die Folge konvergent gegen c: Für alle $\varepsilon > 0$ kann man $N = 1$ wählen und erhält

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

(d) Für $a_n = (-1)^n$ ist die Folge unbestimmt divergent: Angenommen, die Folge hätte Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon = \frac{1}{10} > 0$ gäbe es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle geraden $n \geq N$

$$\frac{1}{10} > |a_n - a| = |1 - a|$$

und für alle ungeraden $n \geq N$

$$\frac{1}{10} > |a_n - a| = |-1 - a|$$

wäre, also müsste ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ sowohl

$$\frac{9}{10} < a < \frac{11}{10} \quad \text{als auch} \quad -\frac{11}{10} < a < -\frac{9}{10}$$

gelten, was nicht möglich ist. Also ist die Folge nicht konvergent. Wegen $-1 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann die Folge auch nicht bestimmt divergent sein, folglich bleibt nur noch übrig, dass sie unbestimmt divergiert.

Bemerkung 6.5.

(a) Jede konvergente Folge ist beschränkt. Aber: Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent, siehe $a_n = (-1)^n$.

(b) Jede bestimmt divergente Folge ist unbeschränkt. Aber: Nicht jede unbeschränkte Folge ist bestimmt divergent, siehe $a_n = (-2)^n$.

Beispiel 6.6 (Geometrische Folge)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Bemerkung 6.7. In manchen Situationen ist es praktischer, wenn die Nummerierung der Folgenglieder nicht bei 1, sondern bei 0 oder mit einer anderen ganzen Zahl beginnt. Die Aussagen in diesem Kapitel lassen sich problemlos auf solche Situationen übertragen.

Satz 6.8 (Limitenregeln/Grenzwertsätze für Folgen)**.**

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, dann gelten:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda \cdot a$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b.$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Aus den ersten beiden Aussagen folgt auch $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$.)

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen.

(i) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

(ii) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

(iii) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } b > 0, \\ -\infty, & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

Insbesondere: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty$.

(iv) Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ schon

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

Beispiel 6.9. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(a) Für $a_n = \frac{n+5}{2n}$ hat man beispielsweise die Folgenglieder

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{4}{3}, \quad a_4 = \frac{9}{8} \quad \text{und} \quad a_{100} = \frac{21}{40},$$

so dass man vermuten könnte, dass die Folge gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert. Es gilt

$$a_n = \frac{n+5}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{5}{2n} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=b_n} + \underbrace{\frac{5}{2}}_{=\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{=c_n}.$$

Aus Beispiel 6.4 erhält man für die konstante Folge b_n direkt $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ und außerdem $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Mit den Limitenregeln hat man dann zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot c_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lambda \cdot 0 = 0$$

und dann

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Kurzgefasst könnte man also schreiben: Mit den Limitenregeln gilt

$$a_n = \frac{n+5}{2n} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\to\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

(b) Für

$$a_n = \frac{-n^3+3n-5}{2n^2+3} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{-1+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}} = \underbrace{n}_{=b_n} \cdot \underbrace{\frac{-1+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}}}_{=c_n}$$

gilt einerseits laut Beispiel 6.4 schon $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$. Aus den Limitenregeln erhält man

$$\frac{3}{n^2} = 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

und analog $\frac{5}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also

$$-1 + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} -1+0+0 = -1 \quad \text{und} \quad 2 + \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 2+0 = 2.$$

Insgesamt erhält man mit den Limitenregeln also

$$c_n = \frac{-1+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

und somit

$$a_n = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{-1+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}}}_{\to -\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty.$$

Satz 6.10 (Quetschlemma[7]). Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$. Falls es einen Folgenindex $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \le a_n \le y_n \quad \text{für alle} \quad n \ge N,$$

so gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel 6.11. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Da $-1 \le \sin(n) \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sogar für alle $n \in \mathbb{R}$) gilt, betrachten wir die Nullfolgen $x_n = -\frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$. Es gilt nun

$$x_n = -\frac{1}{n} \le \underbrace{\frac{\sin(n)}{n}}_{=y_n} \le \frac{1}{n} = y_n \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

also ist mit dem Quetschlemma auch a_n eine Nullfolge.

[7] Auch bekannt als Sandwichlemma, Einschließungssatz und unter vielen anderen Namen.

Definition 6.12. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *rekursiv definiert*, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}) \quad \text{für alle} \quad n > k.$$

Beispiel 6.13. Männliche Bienen (Drohnen) schlüpfen aus unbefruchteten Eiern, Weibchen aus befruchteten. Drohnen haben daher ungewöhnliche Stammbäume wie in Abbildung 1 angedeutet. Mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ sowie der rekursiven Vorschrift

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

beschreibt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Anzahl a_n der Vorfahren der Drohne in der n-ten Elterngeneration (zumindest für $n \geq 1$). Die entstehende Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ heißt *Fibonacci-Folge*. Sie taucht erstaunlich oft in der Mathematik und in der Natur auf.

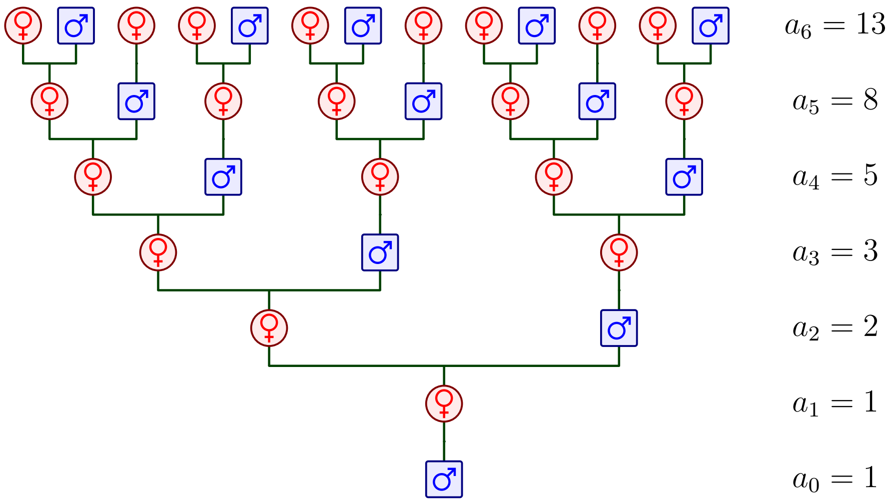


Abbildung 1: Symbolischer Stammbaum einer Drohne bis zur sechsten Elterngeneration. Für jedes $k \in \{1, \dots, 6\}$ ist a_k die Anzahl der Vorfahren in der k-ten Elterngeneration. Für $k \in \{2, \dots, 6\}$ ist a_{k-1} die Anzahl der Weibchen und a_{k-2} die Anzahl der Männchen in der k-ten Elterngeneration.

6.2. Reihen

Definition 6.14. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge, so heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die n-te *Partialsumme* der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen heißt *(unendliche) Reihe* über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, bezeichnet mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe *konvergent* und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ divergiert, heißt die Reihe *divergent*.

Bemerkung 6.15 (Geometrische Summenformel)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beispiel 6.16.

(a) Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ die Reihe über die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen gilt mit der geometrischen Summenformel und der geometrischen Folge

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 2,$$

also konvergiert die Reihe gegen 2: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$. Dies erscheint plausibel, wenn man sich die ersten Folgenglieder ansieht:

k	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	Grenzwert
a_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\ldots$	0
s_k	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{127}{64}$	$\ldots$	2

(b) Allgemeiner: Für $q \in \mathbb{R}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *geometrische Reihe*. Sie konvergiert, falls $|q| < 1$, denn dann gilt (wieder mit der geometrischen Summenformel und der geometrischen Folge)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot \underbrace{q^{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q},$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls} \quad |q| < 1.$$

Für $|q| > 1$ divergiert die geometrische Reihe.

(c) Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert hingegen: Wegen

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \ldots$$

gilt $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_4 \geq 1 + \frac{2}{2}$, $s_8 \geq 1 + \frac{3}{2}$, $s_{16} \geq 1 + \frac{4}{2}$ und somit

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und somit divergent.

Satz 6.17 (Rechenregeln für konvergente Reihen)**.** Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b \in \mathbb{R}$ konvergente Reihen, dann gelten:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a + b.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lambda \cdot a$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definition 6.18. Eine Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ über die Folge der Absolutbeträge $|a_k|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, heißt *bedingt konvergent*.

Bemerkung 6.19. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$ eine absolut konvergente Reihe, so ist auch jede Umordnung der (Summanden der) Reihe konvergent mit Wert a. Ist die Reihe hingegen nur bedingt konvergent, so gibt es für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen b konvergiert.

Satz 6.20 (Konvergenzkriterien für Reihen)**.**

(a) *Absolutkriterium:* Jede absolut konvergente Reihe konvergiert auch. Die Umkehrung der Aussage ist im Allgemeinen falsch (nicht jede konvergent Reihe ist absolut konvergent).

(b) *Nullfolgenkriterium/Trivialkriterium:* Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Die Umkehrung der Aussage ist im Allgemeinen falsch, wie man an der harmonischen Reihe sehen kann.

(c) *Majorantenkriterium*: Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen mit $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle Folgenindizes k ab einem gewissen Punkt. Ist die *Majorante* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(d) *Minorantenkriterium*: Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen mit $a_k \geq b_k \geq 0$ für alle Folgenindizes k ab einem gewissen Punkt. Ist die *Minorante* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(e) *Quotientenkriterium*: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L \in \mathbb{R}.$$

  (i) Ist $L < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
  (ii) Ist $L > 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(f) *Wurzelkriterium*: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in \mathbb{R}.$$

  (i) Ist $L < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
  (ii) Ist $L > 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(g) *Leibniz-Kriterium*: Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge mit $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.

Bemerkung 6.21. Zu beachten ist dabei, dass in den Fällen, die von den jeweiligen Kriterien nicht abgedeckt sind (zum Beispiel im Quotientenkriterium der Fall $L = 1$ oder die Situationen, in denen der Grenzwert L nicht existiert), im Allgemeinen keine Aussage über Konvergenz gemacht werden kann: So ist die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent und es gilt

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

Für $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ hat man auch

$$\frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+2} = 1 - \frac{2}{k+2} \xrightarrow{k\to\infty} 1,$$

wegen

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \end{aligned}$$

hat man allerdings $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ und damit die Konvergenz der Reihe.

Beispiel 6.22. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $k^2 \geq k$ und damit $2k^2 \geq k^2 + k = k(k+1)$ und schließlich

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}.$$

Da laut Bemerkung 6.21 die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ und somit laut Satz 6.17 auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ konvergent ist, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (absolut) konvergent ist.

Bemerkung 6.23. Wenn man den Wert einer Reihe bestimmen will, kann man also auf folgende Werkzeuge zurückgreifen:

- Die Rechenregeln aus Satz 6.17, um die Reihe aus (bekannten konvergenten) Reihen zusammenzubauen.
- Die geometrische Reihe.
- Die Folge der Partialsummen (und damit alle Werkzeuge aus Abschnitt 6.1).

Wenn es nur um Konvergenz und Divergenz einer Reihe geht, sind die Konvergenzkriterien aus Satz 6.20 das wichtigste Werkzeug. Ein möglicher Ablaufplan dazu findet sich in Abbildung 2. Erhält man als Resultat Konvergenz, aber nicht unbedingt absolute Konvergenz, so muss man zusätzlich noch die Absolutreihe auf Konvergenz und Divergenz untersuchen.

Abbildung 2: Ablaufplan zur Anwendung der Konvergenzkriterien aus Satz 6.20, um über Konvergenz und Divergenz von Reihen zu entscheiden. (Quelle, adaptiert)

7. (Konvergenz von) Funktionen und Stetigkeit

7.1. Exponentialfunktionen und Logarithmen

Definition 7.1. Ein *Intervall* ist eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen, die durch ihre Randpunkte definiert ist. Intervalle kommen in den folgenden Formen vor:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$[8] (offenes Intervall)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$, $\pm\infty$ kann aber nur an offenen Enden stehen, wie etwa in

$$[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \infty\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Bemerkung 7.2. Für jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a_n = \frac{x^n}{n!}$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

nach dem Quotientenkriterium, also ist für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (absolut) konvergent. Im Spezialfall $x = 0$ ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar, da dort $a_0 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da dann aber auch $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, erhält man trotzdem die (absolute) Konvergenz der Reihe gegen 1.

Definition 7.3. Die *(natürliche) Exponentialfunktion* exp ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Die Zahl $\mathrm{e} = \exp(1) = 2.71828\ldots$ heißt *Eulersche Zahl.* Man schreibt auch e^x für $\exp(x)$.

Satz 7.4. Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $\exp(0) = 1$.

(b) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Funktionalgleichung)
Insbesondere gilt $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\exp(x) \in (0, \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 7.5. Die *(natürliche) Logarithmusfunktion* $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, sie erfüllt also

$$\log(\exp(x)) = x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{sowie} \qquad \exp(\log(x)) = x \quad \text{für alle} \quad x \in (0, \infty).$$

Besonders in der Mathematik schreibt man oft ln statt log.

[8] Statt runden Klammern werden gelegentlich auch vertauschte eckige Klammern für offene Enden von Intervallen verwendet, etwa $]1, 2[= (1, 2)$.

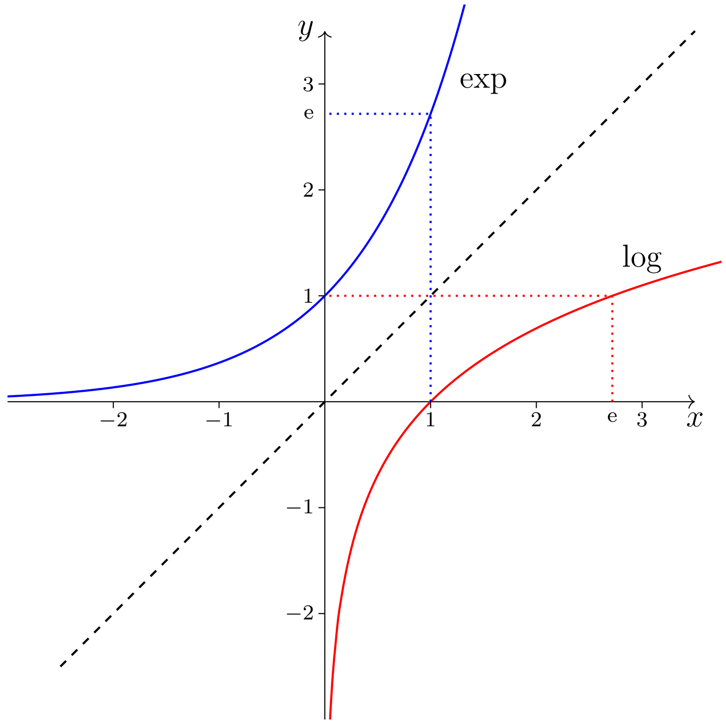


Abbildung 3: Die Graphen der Funktionen exp (in blau) und log (in rot).

Satz 7.6. Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $\log(\mathrm{e}) = \log(\exp(1)) = 1$ und $\log(1) = \log(\exp(0)) = 0$.

(b) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$. (Funktionalgleichung)
Insbesondere gilt $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$.

Bemerkung 7.7. Für $a \in (0, \infty)$ ist die *Exponentialfunktion zur Basis a* definiert als

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x = \exp(x \cdot \log(a)).$$

Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$[9] ist $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, der *Logarithmus zur Basis a*, die Umkehrfunktion von a^x, also

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{sowie} \qquad a^{\log_a(x)} = x \quad \text{für alle} \quad x \in (0, \infty).$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.

(d) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $r \in \mathbb{R}$.

(e) $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. (Basiswechsel)

[9] Für $a = 1$ ist $a^x = 1^x = 1$ eine konstante Funktion und hat somit keine Umkehrfunktion.

Beispiel 7.8. Die Exponentialfunktionen beschreiben Wachstum ($a > 1$) oder Zerfall ($a < 1$). So zerfällt etwa nach dem Tod eines Lebewesens das im Körper enthaltene radioaktive Kohlenstoffisotop ^{14}C mit einer Halbwertszeit von 5370 Jahren, das heißt, nach 5370 Jahren ist nur noch die Hälfte der ^{14}C-Atome übrig, nach $2 \cdot 5370 = 10740$ Jahren nur noch ein Viertel und so weiter. Daraus kann man das ungefähre Alter einer Mumie bestimmen, deren ^{14}C-Gehalt auf 35% gesunken ist: Der ^{14}C-Gehalt zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$G(t) = G_0 \cdot a^t,$$

wobei G_0 der ^{14}C-Gehalt eines lebenden Menschen ist, also der Gehalt zum Todeszeitpunkt $t = 0$. Wir suchen daher das t mit

$$G_0 \cdot a^t = G(t) = G_0 \cdot 0.35,$$

also $a^t = 0.35$ und somit erhalten wir nach Anwendung von log

$$\log(0.35) = \log(a^t) = t \cdot \log(a), \quad \text{also} \quad t = \frac{\log(0.35)}{\log(a)}.$$

Nun berechnen wir die Basis a (oder zumindest $\log(a)$) aus der Halbwertszeit: Es gilt

$$G(t + 5370) = \frac{1}{2} \cdot G(t),$$

also

$$G_0 \cdot a^t \cdot a^{5370} = G_0 \cdot a^{t+5370} = G(t + 5370) = \frac{1}{2} \cdot G(t) = \frac{1}{2} \cdot G_0 \cdot a^t$$

und nach Kürzen somit $a^{5370} = \frac{1}{2}$. Anwenden von log liefert

$$-\log(2) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(a^{5370}) = 5370 \cdot \log(a), \quad \text{also} \quad \log(a) = -\frac{\log(2)}{5370}.$$

Somit erhalten wir

$$t = \frac{\log(0.35)}{\log(a)} = \frac{\log(0.35)}{-\frac{\log(2)}{5370}} = 5370 \cdot \frac{\log(0.35)}{-\log(2)} \overset{\text{TR}}{=} 8133.26\ldots,$$

die Mumie ist also etwa 8133 Jahre alt.

7.2. Konvergenz von Funktionen

Definition 7.9. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Für $a \in D$ heißt f *konvergent* gegen $c \in \mathbb{R}$ an der Stelle a, geschrieben $\lim_{x\to a} f(x) = c$, falls für **alle** Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Bemerkung 7.10. Analog definiert man bestimmte Divergenz gegen $c \in \{\pm\infty\}$. Man kann auch beliebige Stellen $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ betrachten, solange a in D *approximiert* werden kann, falls a also der Grenzwert einer Folge in D ist: Für $D = (0, \infty) \setminus \{7\}$ können etwa 0, 7 und ∞ in D approximiert werden, -1 hingegen nicht.

Beispiel 7.11. (Siehe Abbildung 4 für Graphen zu den folgenden Beispielen.)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Für $a = 5 \in D$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen 5 konvergiert. Mit den Limitenregeln gilt dann
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{5},$$
also $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \frac{1}{5} = f(5)$.
- Es ist $a = \infty$ in D approximierbar, etwa $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt mit den Limitenregeln
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0,$$
also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- Auch $a = 0$ ist in D approximierbar: Für $x_n = \frac{1}{n}$ etwa gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$
Für $x_n = -\frac{1}{n}$ gilt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty.$$
Daher existiert der Ausdruck $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ hier nicht, da der Wert nicht unabhängig von der gewählten Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(b) Sei $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$. Dann gilt mit den Limitenregeln
$$x_n - 3 \xrightarrow{n\to\infty} 2 - 3 = -1 \quad \text{und} \quad (x_n - 2)^2 \xrightarrow{n\to\infty} (2-2)^2 = 0.$$
Da $(x_n - 2)^2 > 0$ ist, folgt $\frac{1}{(x_n-2)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, wieder mit den Limitenregeln gilt
$$g(x_n) = \underbrace{(x_n - 3)}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x_n-2)^2}}_{\to\infty} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty,$$
also $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -\infty$.

(c) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$ existiert nicht, da sowohl $(2\pi n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $D = \mathbb{R}$ mit Grenzwert ∞ sind, aber
$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} \sin(0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right).$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x > 1$ gilt $x^n \geq x$, also folgt aus $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ auch $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$.

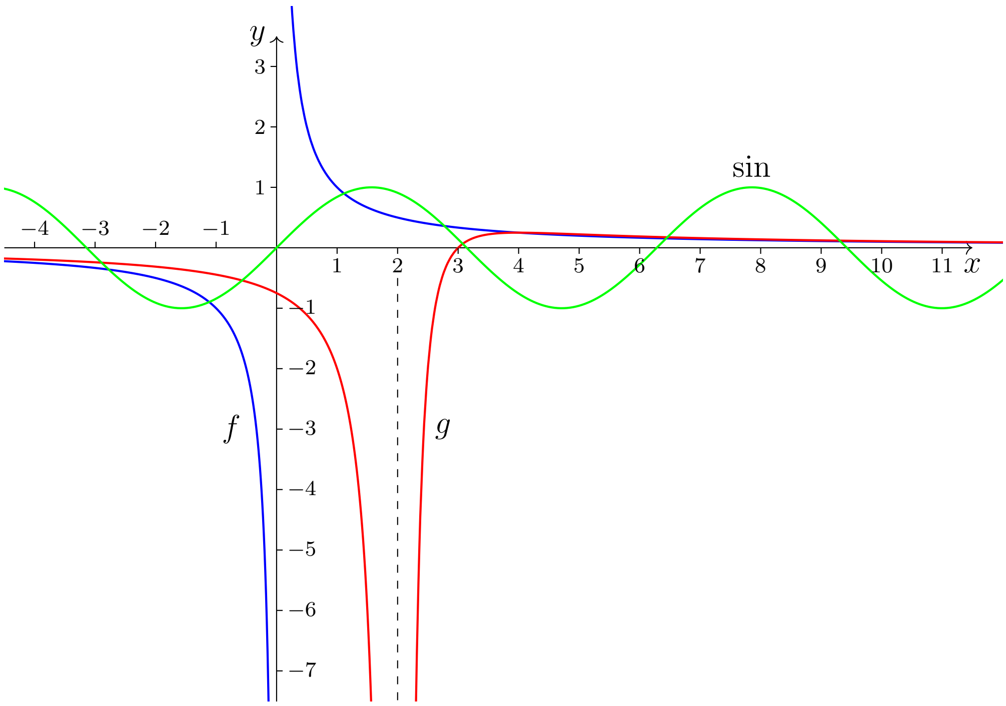


Abbildung 4: Die Graphen der Funktionen aus Beispiel 7.11: f in blau, g in rot, sin in grün.

Bemerkung 7.12. Für die Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

Entsprechend erhält man für den Logarithmus

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty.$$

Für alle Stellen $a \in \mathbb{R}$ und alle Basen $b \in (0, \infty)$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} b^x = \begin{cases} \infty, & \text{falls } b > 1, \\ 1, & \text{falls } b = 1, \\ 0, & \text{falls } b < 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0, & \text{falls } b > 1, \\ 1, & \text{falls } b = 1, \\ \infty, & \text{falls } b < 1, \end{cases}.$$

Satz 7.13 (Limitenregeln/Grenzwertsätze für Funktionen)**.**

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$. Sei weiterhin $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in D approximierbar. Wenn die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x) = L_f \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a} g(x) = L_g \in \mathbb{R}$ existieren, dann gilt auch:

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_f + L_g$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda \cdot L_f$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_f \cdot L_g$.

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_f}{L_g}$, falls $L_g \neq 0$.

(Aus den ersten beiden Aussagen folgt auch $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.)

(b) Kettenregel: Gilt sinngemäß $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ für geeignete Funktionen f und g, so folgt[10]

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

(c) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$. Sei weiterhin $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in D approximierbar. Falls $\lim_{x\to a} f(x) \in \{\pm\infty\}$ und $\lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}$, dann gilt auch:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)$.

(ii) Falls $L \neq 0$: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x), & \text{falls } L > 0, \\ -\lim_{x\to a} f(x), & \text{falls } L < 0. \end{cases}$

(iii) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Beispiel 7.14.

(a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(-x^7)$ und gesucht sei $\lim_{x\to\infty} h(x)$. Es gilt $h(x) = g(f(x))$ für $g(x) = \exp(x)$ und $f(x) = -x^7$. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -x^7 = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

erhält man also $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$.

(b) Sei $p(x) = 3x^2 - 2x + 1 = x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$. Es gilt $\frac{2}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$, also erhält man mit den Limitenregeln

$$\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3 - 0 + 0 = 3.$$

Wegen $x^2 \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ folgt weiterhin

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}_{\to 3} = \infty.$$

[10]Genauer: Die Folgerung gilt, falls g in b stetig ist (siehe unten) oder wenn f den Wert b in der Nähe von a nicht annimmt: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$ auch $f(x) \neq b$ gilt.

7.3. Stetigkeit

Definition 7.15. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *stetig in* $a \in D$, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$ [11]

Die Funktion f heißt *stetig (auf D)*, falls f in allen Stellen $a \in D$ stetig ist.
Informell gesprochen gilt für stetige Funktionen: Wenn x in der Nähe von a ist, muss auch $f(x)$ in der Nähe von $f(a)$ sein.

Satz 7.16. Aus Satz 7.13 erhält man folgende Aussagen:

(a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig auf $D \subseteq \mathbb{R}$.

  (a) Die Funktion $f + g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$ ist stetig.

  (b) Die Funktion $\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ ist stetig für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

  (c) Die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist stetig.

  (d) Die Funktion $\frac{f}{g} : \tilde{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ ist stetig, wobei $\tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

(b) Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ stetig auf $D_f \subseteq \mathbb{R}$ beziehungsweise $D_g \subseteq \mathbb{R}$ und es gelte $g(D_g) \subseteq D_f$. Dann ist auch die Komposition $f \circ g$ stetig, wobei

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x)).$$

Beispiel 7.17. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c \in \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, so gilt

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c = f(a),$$

also ist f stetig. Auch die Identitätsfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist stetig, da

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x = a = g(a).$$

Mit Satz 7.16 sind somit auch alle Polynomfunktionen $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ stetig. Weiterhin sind alle rationalen Funktionen stetig, da sie Quotienten von Polynomfunktionen sind.

Bemerkung 7.18. Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und trigonometrische Funktionen wie Sinus und Kosinus sind stetig. Alle Funktionen, die man durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Komposition von stetigen Funktionen erhält, sind auch wieder stetig.

Beispiel 7.19. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0, \\ x+1, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig: Für die Nullfolge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\to\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 \neq 1 = f(0).$$

[11] Konkret bedeutet dies, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ auch gelten muss, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

Bemerkung 7.20. Stetige Funktionen können mit Grenzwertbildung vertauscht werden: Wenn f stetig in b ist und $\lim_{x\to a} g(x) = b$ gilt, dann folgt

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Beispiel 7.21. Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Da exp stetig ist, folgt aus $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ schon

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = \exp(0) = 1.$$

Satz 7.22 (Zwischenwertsatz)**.** Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$. Dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$, d.h. f nimmt alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ auf dem Intervall $[a,b]$ an.

Beispiel 7.23. (a) Für die Polynomfunktion $f(x) = x^5 + 4x^4 + x - 8$ gilt $f(-10) = -10^5 + 4 \cdot 10^4 - 10 - 8 < 0$ und $f(10) = 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 10 - 8 > 0$. Also hat f im Intervall $[-10, 10]$ eine Nullstelle.

Das geht genauso gut für alle Polynome $f(x)$ mit ungeradem Grad, d.h. der höchste Exponent ist ungerade. Denn für solch ein Polynom gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \mp\infty = -\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Für groß genuges K ist also $f(-K) < 0 < f(K)$ oder $f(K) < 0 < f(K)$ und nach dem Zwischenwertsatz haben wir eine Nullstelle.

(b) Aus $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ erhalten wir aus dem Zwischenwertsatz, dass für jedes $y \in (0,\infty)$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$ existiert, also ist $(0,\infty) \subseteq \text{Bild}(\exp)$. Da auch $\exp(x) > 0$ gilt, ist damit $\text{Bild}(\exp) = (0,\infty)$ gezeigt.

(c) (nicht prüfungsrelevante Anwendung:) Wir können mit dem Zwischenwertsatz sogar Nullstellen approximieren. Sei $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a_0) < 0 < f(b_0)$. Wir halbieren das Intervall $[a_0, b_0]$ mit $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und gehen wie folgt vor:

- Ist $f(c_0) = 0$ haben wir eine Nullstelle gefunden.
- Ist $f(c_0) < 0 < f(b_0)$, dann hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[c_0, b_0]$. Wir setzen dann $a_1 := c_0$ und $b_1 := b_0$.
- Ist $f(c_0) > 0 < f(a_0)$, dann hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[a_0, c_0]$. Wir setzen dann $a_1 := a_0$ und $b_1 := c_0$.

Wir wiederholen dann obiges mit $c_i := \frac{a_i+b_i}{2}$ und erhalten so entweder eine Nullstelle c_i oder eine monoton steigende Folge $a_n < b_0$ und eine monoton fallende Folge $b_n > a_0$ mit $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$. Nach dem Monotoniekriterium konvergieren a_n und b_n und wegen $\frac{b_0-a_0}{2^n} \overset{n\to\infty}{0}$ haben sie den gleichen Grenzwert x_0. Wir wollen nun einsehen, dass x_0 tatsächlich eine Nullstelle von f ist:
Nach Konstruktion haben wir immer mindestens eine Nullstelle $a_n \leq y_n \leq b_n$ von f, wir erhalten also nach dem Sandwichlemma $x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Da f stetig ist, gilt also

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = f(x_0).$$

Definition 7.24. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen dann f ist

(a) *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) \geq f(y)$ gilt.

(b) *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) > f(y)$ gilt.

(c) *monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) \leq f(y)$ gilt.

(d) *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) < f(y)$ gilt.

Satz 7.25. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion, dann ist $\mathrm{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$ und die Funktion

$$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$$

hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.
Entsprechend gilt die Aussage auch für stetige, streng monoton fallende Funktionen mit $\mathrm{Bild}(f) = [f(b), f(a)]$ und für offene bzw. halboffene Intervalle, wobei wir $f(a)$ durch den Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ ersetzen. (Wegen dem Minorantenkriterium und der Monotonie existieren diese Grenzwerte immer)

Beispiel 7.26. Die Exponentialfunktion ist stetig und streng monoton wachsend auf dem offenen Intervall $(-\infty, \infty)$. Wegen $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ erhalten wir eine **stetige** Umkehrabbildung $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 7.27. Wir benötigen in Satz 6.25, dass D ein Intervall ist. Ein Gegenbeispiel findet sich auf dem Übungsblatt (z.B. Übungsblatt 11 vom WS 23/24).

8. Differentialrechnung

Bemerkung 8.1. In diesem Abschnitt betrachten wir reellwertige Funktionen, die auf einem offenen Intervall (a, b) mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $a < b$ definiert sind. (Somit ist etwa auch der Fall $(a, b) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ möglich.)

Definition 8.2. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Die Funktion f heißt *differenzierbar in* $x_0 \in (a, b)$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert mit $f'(x_0)$ und nennen ihn *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

(b) Die Funktion f heißt *differenzierbar (auf* (a, b)*)*, falls f in allen Punkten $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist. Dann ist $f' : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$ eine Funktion, die *(erste) Ableitung* von f.

(c) Die Funktion f heißt *zweimal differenzierbar*, wenn f differenzierbar ist und f' auch differenzierbar ist. Die *zweite Ableitung* ist dann $f'' = (f')'$. Analog definiert man höhere Ableitungen. Spätestens ab der vierten Ableitung schreibt man normalerweise etwa $f^{(4)}$ statt f''''.

Beispiel 8.3.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und betrachte die konstante Funktion$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{x \to x_0} 0,$$

also existiert der Grenzwert und hat den Wert 0: $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist also differenzierbar mit der konstanten Nullfunktion als Ableitung:

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0 \qquad \text{(oder kurz } c' = 0\text{)}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \to x_0} 1,$$

also $f'(x_0) = 1$. Die Funktion f ist also differenzierbar mit der Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 \qquad \text{(oder kurz } x' = 1\text{)}.$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \to x_0} 2x_0,$$

also $f'(x_0) = 2x_0$. Die Funktion f ist also differenzierbar mit der Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x \qquad \text{(oder kurz } (x^2)' = 2x\text{)}.$$

(d) Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar: Für die Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ gilt

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1,$$

aber für die Nullfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n - \frac{1}{n}$ erhält man den anderen Wert

$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1 \xrightarrow{n \to \infty} -1,$$

daher existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x_0 = 0$ nicht.

Weitere Ableitungen sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Funktion	Ableitung
$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

Tabelle 1: Wichtige Funktionen und ihre Ableitungen.

Satz 8.4. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, dann ist f in x_0 auch stetig. Insbesondere sind differenzierbare Funktionen auch stetig.

Satz 8.5 (Ableitungsregeln)**.**

(a) Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann sind auch die folgenden Funktionen differenzierbar:

(i) Die Funktion $f + g : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$ mit

$$(f + g)' = f' + g'. \qquad \text{(Additivität)}$$

(ii) Die Funktion $\lambda f : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ mit

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'. \qquad \text{(Homogenität)}$$

(iii) Die Funktion $f \cdot g : (a, b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ mit

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \qquad \text{(Produktregel)}$$

(iv) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$: Die Funktion $\frac{f}{g} : (a,b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

(b) Seien $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g((a,b)) \subseteq (c,d)$, dann ist die Funktion $f \circ g : (a,b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(g(x))$ differenzierbar mit

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'. \qquad \text{(Kettenregel)}$$

(c) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Wenn f eine Umkehrabbildung f^{-1} hat, so ist f' differenzierbar mit

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \qquad \text{(Ableitung der Umkehrfunktion)}$$

Beispiel 8.6.

(a) (i) Für $f(x) = x$ und $g(x) = 3$ gilt

$$(x+3)' = x' + 3' = 1 + 0 = 1.$$

(ii) Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ gilt

$$(\sin(x) \cdot \cos(x))' = \sin'(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

(iii) Für $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x - 1$ gilt auf jedem offenen Intervall (a,b), welches nicht 1 enthält,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' &= \frac{(x^2+1)' \cdot (x-1) - (x^2+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}. \end{aligned}$$

(b) Für $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = x^3 - 1$ gilt

$$(\exp(x^3 - 1))' = \exp'(x^3 - 1) \cdot (x^3 - 1)' = \exp(x^3 - 1) \cdot 3x^2.$$

(c) Für $f = \exp$ ist $f^{-1} = \log$ die Umkehrfunktion, es gilt also

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(d) Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cdot x^{n-1}, \\ f''(x) &= n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}, \\ &\dots \\ f^{(n-1)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x^1, \\ f^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0 = n!, \\ f^{(n+1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

und damit sind auch alle höheren Ableitung Null. Zusammengefasst gilt

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}, & \text{falls } k \leq n, \\ 0, & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

Satz 8.7 (Regel von L'Hospital/L'Hôpital (gesprochen "Lopital")).
Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $c \in (a, b) \cup \{a, b\}$[12], so dass alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.
- Es gilt entweder $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x\to c} g(x) \in \{\pm\infty\}$.
- Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Dann folgt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 8.8.

(a) Was ist $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x)}{x}$? Wir überprüfen die Voraussetzungen für L'Hospital:
   - Es gilt $x' = 1 \neq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.
   - Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$.
   - Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\exp(x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\exp(x))}{1} = \infty$.

   Mit der Regel von L'Hospital folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\exp(x))'}{x'} = \infty$.

(b) Was ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$? Wir überprüfen die Voraussetzungen für L'Hospital:
   - Es gilt $x' = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - Es gilt $\lim\limits_{x\to 0}(\exp(x) - 1) = \exp(0) - 1 = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
   - Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\exp(x) - 1)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)}{1} = \exp(0) = 1$.

   Mit der Regel von L'Hospital folgt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\exp(x) - 1)'}{x'} = 1$.

Bemerkung 8.9. Manchmal muss man die Regel von L'Hospital mehrfach anwenden, um zum Ziel zu kommen, etwa bei $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\exp(x)}{x^2}$:

- Es gilt $(x^2)' = 2x \neq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.
- Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.
- Allerdings erfordert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\exp(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\exp(x)}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x}$$

  die erneute Anwendung der Regel von L'Hospital wie in Beispiel 8.8 beschrieben.

[12] Im Fall $a, b \in \mathbb{R}$ könnte man natürlich kürzer $c \in [a, b]$ schreiben. Mit $c \in (a, b) \cup \{a, b\}$ sind aber auch die Fälle $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ abgedeckt und es können auch Grenzwerte für $c \to \pm\infty$ betrachtet werden.

Definition 8.10. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt…

$$
\begin{array}{rlr}
\bullet \quad \textit{monoton steigend,} & & f(x) \leq f(y). \\
\bullet \quad \textit{streng monoton steigend,} & \text{falls für alle } x, y \in D \text{ mit } x < y \text{ gilt:} & f(x) < f(y). \\
\bullet \quad \textit{monoton fallend,} & & f(x) \geq f(y). \\
\bullet \quad \textit{streng monoton fallend,} & & f(x) > f(y).
\end{array}
$$

Statt "steigend" sagt man auch "wachsend", statt "streng" sagt man auch "strikt".

Satz 8.11. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls

$$
\begin{array}{lll}
\bullet \quad f'(x) \geq 0 & & \text{monoton steigend.} \\
\bullet \quad f'(x) > 0 & \text{für alle } x \in (a, b), \text{ so ist } f & \text{streng monoton steigend.} \\
\bullet \quad f'(x) \leq 0 & & \text{monoton fallend.} \\
\bullet \quad f'(x) < 0 & & \text{streng monoton fallend.}
\end{array}
$$

Definition 8.12. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein…

- *lokales Maximum*, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.
- *lokales Minimum*, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.
- *lokales Extremum*, falls f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum hat.
- *globales Maximum*, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.
- *globales Minimum*, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.

Satz 8.13. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$.

(a) Wenn f in x_0 ein lokales Extremum hat, dann muss $f'(x_0) = 0$ gelten.[13]

(b) Sei $f'(x_0) = 0$ und f sogar zweimal differenzierbar.

  (i) Falls $f''(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in x_0.

  (ii) Falls $f''(x_0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in x_0.

  (iii) Falls $f''(x_0) = 0$, so haben wir im Allgemeinen keine Aussage über x_0.

[13] Lokale Extrema können also nur an den Nullstellen der ersten Ableitung auftreten. Allerdings muss nicht an jeder Nullstelle der ersten Ableitung auch ein Extremum vorliegen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ hat keine lokalen Extrema, obwohl 0 eine Nullstelle von $f'(x) = 3x^2$ ist!

Beispiel 8.14. Betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1}.$$

Etwa mit der Quotientenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{sowie} \quad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}.$$

(a) Die Funktion f hat keine Nullstellen, da $0 = f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ keine Lösung hat.

(b) Wegen $(x^2+1)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} > 0$ genau dann, wenn $-2x > 0$, also wenn $x < 0$. Also ist f auf $(-\infty, 0)$ streng monoton wachsend. Analog erhält man, dass f auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend ist.

(c) Da $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist, kann f wenn überhaupt nur da ein lokales Extremum haben. Wegen

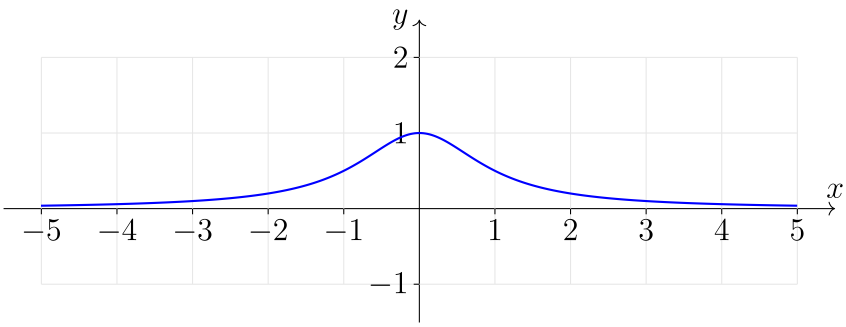
$$f''(0) = \frac{6 \cdot 0^2 - 2}{(0^2+1)^3} = -2 < 0$$

hat f an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum mit Wert $f(0) = \frac{1}{0^2+1} = 1$.

(d) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Aus den aus dieser "Kurvendiskussion" gewonnenen Erkenntnissen kann man nun eine Skizze der Funktion f anfertigen:



9. Integralrechnung

9.1. Bestimmte und unbestimmte Integrale

Definition 9.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls sie auf (a, b) differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Man schreibt $F(x) = \int f(x)dx$ und nennt F *unbestimmtes Integral* von f.

Bemerkung 9.2. Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig: Ist F eine Stammfunktion von f, so auch $G = F + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$, da $G' = F' + c' = F' = f$. Beispiele für Stammfunktionen sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Funktion	Stammfunktion
$f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$	$F(x) = \lambda x$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ für $x \in (0, \infty)$	$F(x) = \log(x)$
$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$

Tabelle 2: Wichtige Funktionen und ihre Stammfunktionen

Bemerkung 9.3.

(a) Es gilt immer

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

unabhängig von der konkreten Wahl der Stammfunktion $\int f(x)dx$. Andererseits hängt $\int f'(x)dx$ sehr wohl von der Wahl der konkreten Stammfunktion ab: Für $f(x) = x + 2$ ist auch $g(x) = x$ eine Stammfunktion von $f'(x) = 1$.

(b) Da Ableiten linear ist, ist auch das Bilden von Stammfunktionen linear: Seien F und G Stammfunktionen von f und g. Dann gilt

$$(F + G)' = F' + G' = f + g \quad \text{und} \quad (\lambda F)'\lambda \cdot F' = \lambda \cdot f \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

also ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$ und $\lambda \cdot F$ ist eine Stammfunktion von $\lambda \cdot f$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

und

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definition 9.4 (*informell*)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Das *(bestimmte) Integral* über f von a bis b, geschrieben $\int_a^b f(x)dx$, ist der (vorzeichenbehaftete) Inhalt der Fläche, die auf dem Intervall $[a, b]$ vom Funktionsgraphen von f und der x-Achse begrenzt wird (oberhalb der x-Achse zählt positiv, unterhalb negativ).

Satz 9.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.**

(a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist eine Stammfunktion von f gegeben durch

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

(b) Ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung 9.6. Sind F und $G = F + c$ zwei Stammfunktionen von f mit $c \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) - c) = F(b) - F(a),$$

also hängt der mit dem Hauptsatz berechnete Wert von $\int_a^b f(x)dx$ nicht von der Wahl der Stammfunktion F ab.

Beispiel 9.7. Was ist $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx$? Da $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ist, gilt mit dem Hauptsatz

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx = F(5) - F(1) = -\frac{1}{5} - (-1) = \frac{4}{5}.$$

Häufig schreibt man das auch als

$$\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^5 = -\frac{1}{5} - (-1) = \frac{4}{5}.$$

Satz 9.8 (Integrationsregeln)**.** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so auch

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad \text{(Monotonie)}$$

(b) Es gilt

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \qquad \text{(Additivität)}$$

(c) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx. \qquad \text{(Homogenität)}$$

(d) Für alle $s \in [a,b]$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^s f(x)dx + \int_s^b f(x)dx. \qquad \text{(Zerlegung)}$$

Satz 9.9 (Partielle Integration)**.** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

und

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Beispiel 9.10.

(a) Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\int_0^2 \underbrace{x}_{g}\underbrace{\exp(x)}_{f'}\,dx &= [\underbrace{x}_{g}\underbrace{\exp(x)}_{f}]_0^2 - \int_0^2 \underbrace{1}_{g'}\underbrace{\exp(x)}_{f}\,dx \\ &= 2\exp(2) - 0\cdot\exp(0) - \int_0^2 \exp(x)dx \\ &= 2\exp(2) - [\exp(x)]_0^2 \\ &= 2\exp(2) - \exp(2) + \exp(0) = \exp(2) + 1 = \mathrm{e}^2 + 1.\end{aligned}$$

(b) Mit partieller Integration gilt und unter Ausnutzung von $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ gilt

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^2 dx &= \int \underbrace{\sin(x)}_{f'}\underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx \\ &= \underbrace{-\cos(x)}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{-\cos(x)}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int \cos(x)^2 dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin(x)^2 dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1dx - \int \sin(x)^2 dx.\end{aligned}$$

Bringt man nun $\int \sin(x)^2 dx$ auf die linke Seite, folgt

$$\begin{aligned}2\int \sin(x)^2 dx &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1dx \\ &= -\cos(x)\sin(x) + x,\end{aligned}$$

also

$$\int \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2}\big(x - \cos(x)\sin(x)\big).$$

Satz 9.11 (Substitution)**.** Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $u : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar[14]. Dann gilt

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

und (wenn $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist)

$$\int f(u(t))u'(t)dt = F(u(t)).$$

Bemerkung 9.12. Nach der Substitution kann es vorkommen, dass $u(a) > u(b)$ und die Integrationsgrenzen somit "falsch herum" stehen. Daher setzt man allgemein für $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Beispiel 9.13. Zur Bestimmung von $\displaystyle\int_0^2 t\exp(t^2)dt$ sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ mit $u'(x) = 2x$ sowie $f(x) = \exp(x)$. Mit Substitution gilt

$$\begin{aligned}\int_0^2 t\exp(t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{2t}_{=u'(t)}\underbrace{\exp(t^2)}_{=f(u(t))}dt &= \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(2)} \underbrace{\exp(x)}_{=f(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{0^2}^{2^2}\exp(x)dx = \frac{1}{2}[\exp(x)]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}(\exp(4) - \exp(0)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - 1).\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\int t\exp(t^2)dt = \frac{1}{2}\exp(t^2).$$

Bemerkung 9.14. Eine Funktion heißt *elementar*, wenn man sie nach dem Baukastenprinzip mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Verkettung aus einem Fundus von Standardfunktionen zusammenbauen kann. Standardfunktionen sind dabei Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen und (inverse) trigonometrische Funktionen. Während Ableitungen von differenzierbaren elementaren Funktionen selbst wieder elementare Funktionen sind, gibt es elementare Funktionen, die zwar integrierbar sind, aber keine elementare Stammfunktion haben, etwa

$$\exp(x^2), \quad \exp(\exp(x)), \quad \sqrt{\log(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(x)}{x}.$$

Solche *nicht elementar integrierbaren* Funktion können trotzdem wichtig sein: In der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung taucht oft die sogenannte *(Gaußsche) Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt$$

auf, die laut dem Hauptsatz (Satz 9.5) eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-t^2)$ ist. Da f nicht elementar integrierbar ist, gibt es keine geschlossene Form für $\operatorname{erf}(x)$: Funktionsauswertungen der Fehlerfunktion können nur durch numerische Näherungen bestimmt werden.

[14] Eine Funktion f ist *stetig differenzierbar*, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

9.2. Uneigentliche Integrale

Bemerkung 9.15. Als *uneigentliche Integrale* bezeichnet man Integrale, bei denen der Integrand an einer der beiden Integrationsgrenzen nicht definiert ist[15], etwa

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b g(x)dx$$

für Funktionen $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Über Grenzwertbetrachtungen kann man auch solche Integrale angehen:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b g(x)dx = \lim_{r\to a} \int_r^b g(x)dx.$$

Beispiel 9.16. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Mit den Limitenregeln gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{1}\right) = 1,$$

der Flächeninhalt unter dem Graphen von f von 1 bis ∞ ist also endlich. Im Gegensatz dazu gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{r\to 0} \int_r^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{r\to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_r^1 = \lim_{r\to 0} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{r}\right) = \infty,$$

der Flächeninhalt unter dem Graphen von f von 0 bis 1 ist also unendlich. Eine graphische Darstellung findet sich in Abbildung 5.

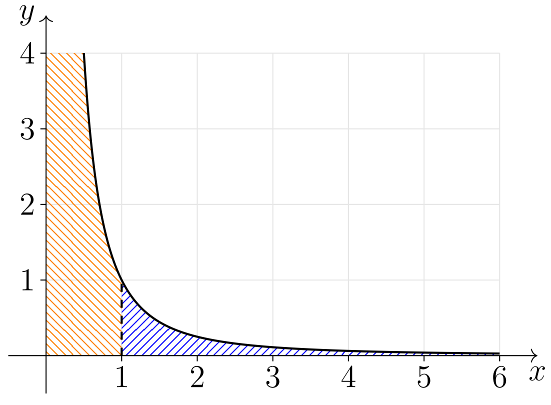


Abbildung 5: Fläche unter der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. Die blau schraffierte Fläche entspricht $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx = 1$, die orange $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \infty$.

[15] Ist der Integrand an beiden Integrationsgrenzen nicht definiert, wird die Sache diffiziler, da etwa zwischen

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{R\to\infty} \lim_{r\to-\infty} \int_r^R f(x)dx \quad \text{und}$$

ein gewaltiger Unterschied bestehen kann. Daher beschränken wir uns hier auf den Fall genau einer problematischen Integrationsgrenze.

10. (Gewöhnliche) Differentialgleichungen

Beispiel 10.1. Sei $y(t)$ die Konzentration eines Stoffes Y, der in einer chemischen Reaktion verbraucht wird, in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit $t \in [0, \infty)$. Die Rate $y'(t)$, mit der Y verbraucht wird, sollte einerseits proportional zur noch vorhandenen Menge $y(t)$ sein und andererseits negativ sein (da die Konzentration im Laufe der Reaktion abnimmt). Ein üblicher Ansatz ist also

$$y'(t) = -ay(t),$$

wobei in $a \in (0, \infty)$ alle physikalischen Konstanten der Reaktion zusammengefasst werden. Somit ist die gesuchte Funktion $y(t)$ nur implizit definiert als Lösung einer *Differentialgleichung*. In diesem Beispiel suchen wir eine Funktion, die sich beim Ableiten bis auf einen Faktor $-a$ reproduziert, also sind etwa alle Funktionen der Form

$$y(t) = c \exp(-at)$$

Lösungen, da

$$y'(t) = (c \exp(-at))' = -ac \exp(-at) = -ay(t).$$

Hierbei ist $c = c \exp(-a \cdot 0) = y(0)$ die Konzentration zum Startzeitpunkt $t = 0$.

Definition 10.2.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

heißt *(gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Man nennt x die *unabhängige Variable* der Gleichung.

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lösung* der obigen Differentialgleichung, falls für alle $x \in I$

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \text{und} \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

(c) Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung heißt *linear*, wenn sie die Form

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y + r(x)$$

für Funktionen $a_0, \dots, a_{n-1}, r : I \to \mathbb{R}$ hat, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei. Die Gleichung heißt *homogen*, falls $r = 0$, ansonsten heißt sie *inhomogen*.

(d) Eine Sammlung von mehreren Differentialgleichungen für mehrere unbekannte Funktionen $y_1, \dots, y_m$ heißt *System von Differentialgleichungen*. Ein System von n homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung hat folgende Form:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{aligned}$$

Dies schreibt man auch in Matrixform als $y' = A(x)y$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 10.3. Eine Kugel der Masse m schwingt frei an einer Feder mit Federkonstante $k \in (0, \infty)$. Die Auslenkung der Kugel vom Ruhepunkt zum Zeitpunkt t sei $y(t)$. Wegen $F = ma$ (Kraft ist Masse mal Beschleunigung), $F = -ky$ (Rückstellkraft der Feder) und $a = y''$ (Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Wegs) erhält man die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$my'' = ma = F = -ky \quad \text{beziehungsweise} \quad y'' = -\frac{k}{m}y.$$

Sei $\mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dann sind alle Funktionen der Form

$$y(t) = c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen der Differentialgleichung: Es gilt

$$\begin{aligned} y''(t) &= (c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t))'' \\ &= c_1 \sin(\mu t)'' + c_2 \cos(\mu t)'' \\ &= -c_1\mu^2 \sin(\mu t) - c_2\mu^2 \cos(\mu t) \\ &= -\mu^2(c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t)) = -\frac{k}{m}y(t). \end{aligned}$$

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss man etwa die Auslenkung $y(t)$ und die Geschwindigkeit $y'(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ festlegen.

Definition 10.4. Ein *Anfangswertproblem* (AWP) zu einer Differentialgleichung ist die Suche nach Lösungen der Differentialgleichung, die zusätzlich *Anfangsbedingungen* der Form $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \in \mathbb{R}$ für einen Punkt x_0 erfüllen.

Beispiel 10.5. Laut Beispiel 10.3 hat die Differentialgleichung $y'' = -\frac{k}{m}y$ die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t), \quad \text{wobei} \quad \mu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Betrachtet man nun dazu die Anfangsbedingungen $y(0) = a \in \mathbb{R}$ und $y'(0) = b \in \mathbb{R}$, so erhält man die Lösung des AWP durch Einsetzen: Aus

$$a = y(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$$

und (wegen $y'(t) = c_1\mu \cos(\mu t) - c_2\mu \sin(\mu t)$)

$$b = y'(0) = c_1\mu \cos(0) - c_2\mu \sin(t) = c_1\mu$$

folgt

$$y(t) = \frac{b}{\mu} \sin(\mu t) + a \cos(\mu t).$$

Satz 10.6 (Satz von Picard-Lindelöf für lineare DGL)**.** Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $a_0, \ldots, a_{n-1}, r : I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien weiterhin $y_0^{(0)}, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$. Dann hat das AWP

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y + r(x)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

eine eindeutige Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 10.7 (Separation der Variablen)**.** Hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x)g(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben, so kann man durch $g(y)$ teilen und mit dx "multiplizieren" und erhält erst

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \quad \text{und dann} \quad \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + c$$

durch Integrieren auf beiden Seiten, wobei man die Integrationskonstanten in c sammelt. Nun löst man nach y auf (gegebenenfalls muss man noch die Anfangsbedingung einsetzen, um c zu finden) und überlegt sich abschließend, für welche x die Funktion y sowohl definiert ist als auch die Differentialgleichung löst.

Beispiel 10.8. Betrachten wir erneut die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = -ay$ aus Beispiel 10.1 mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$: Mit $g(y) = y$ und $f(t) = -a$ erhalten wir

$$\log(y) = \int \frac{1}{y}dy = \int -adt = -at + c$$

für $y > 0$. Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$c = -a \cdot 0 + c = \log(y(0)) = \log(1) = 0,$$

also $\log(y) = -at$. Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert unseren Kandidaten

$$y(t) = \exp(\log(y)) = \exp(-at).$$

Die Probe zeigt, dass y die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung erfüllt und somit das AWP löst.

Bemerkung 10.9. Allgemeiner gilt: Ist F eine Stammfunktion von f, so sind alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x)y$$

gegeben durch

$$y(x) = c\exp(F(x)) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 10.10. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachte die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0.$$

Wenn man den Ansatz $y(x) = \exp(\lambda x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wählt, gilt

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) &= \lambda^2 \exp(\lambda x) + \alpha\lambda \exp(\lambda x) + \beta \exp(\lambda x) \\ &= (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) \exp(\lambda x) \\ &= (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) y(x). \end{aligned}$$

Damit die Differentialgleichung erfüllt ist, muss also λ die *charakteristische Gleichung* $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ erfüllen. Es gibt nun drei Fälle:

- Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(\lambda_2 x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Die charakteristische Gleichung hat eine doppelte Lösung $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = c_1 \exp(\lambda x) + c_2 x \exp(\lambda x) = (c_1 + c_2 x) \exp(\lambda x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Die charakteristische Gleichung hat zwei echt komplexe Lösungen $\lambda = \lambda_0 + \mathrm{i}\mu$ und $\overline{\lambda}$ mit $\lambda_0, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = (c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)) \exp(\lambda_0 x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 10.11. Die Differentialgleichung $y'' + \frac{k}{m} y = 0$ aus Beispiel 10.3 hat die charakteristische Gleichung

$$0 = \lambda^2 + \frac{k}{m} = (\lambda - \mathrm{i}\mu)(\lambda + \mathrm{i}\mu), \quad \text{wobei} \quad \mu = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

mit den komplexen Lösungen $\lambda = 0 + \mathrm{i}\mu$ und $\overline{\lambda}$. Wir erhalten erneut alle Lösungen der Differentialgleichung als

$$y(t) = (c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t)) \exp(0 \cdot t) = c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 10.12. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und betrachte erneut

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0.$$

Man kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung umschreiben als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für $y_1 = y$ und $y_2 = y'$, denn dann gilt

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\beta y - \alpha y' \end{pmatrix}.$$

Der Name *charakteristische Gleichung* für $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ kommt nun daher, dass

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \beta & \lambda + \alpha \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + \alpha) + \beta = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta.$$

Auch für allgemeinere Systeme der Form $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entscheiden die algebraischen Eigenschaften der Matrix A, insbesondere die Eigenwerte und Eigenräume, über die Lösungen des Systems.

A. Kleines Lexikon mathematischer Konzepte

A.1. Das griechische Alphabet

Bemerkung A.1. In der Mathematik kommen häufig griechische Buchstaben zum Einsatz, die der Vollständigkeit halber in der folgenden Tabelle aufgelistet sind:

Buchstabe		Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε, ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My ("Mü")
N	ν	Ny ("Nü")
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ, ϕ	Phi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Da beispielsweise ein großes Alpha nicht von einem großen "a" zu unterscheiden ist, verwendet man natürlich nur diejenigen Buchstaben, die sich von den lateinischen Buchstaben unterscheiden lassen.

A.2. Mengen

Definition A.2. Eine *Menge* ist eine Ansammlung von Objekten. Die Objekte in einer Menge heißen ihre *Elemente*. Wichtig ist, dass man für jedes Objekt genau entscheiden kann, ob es in einer gegebenen Menge liegt oder nicht. Wir verwenden zwei Möglichkeiten, Mengen zu definieren:

- $M = \{a, b, c, \ldots\}$ bedeutet, dass die Menge M genau aus den aufgezählten Elementen $a, b, c, \ldots$ besteht.
- $M = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$ bedeutet, dass die Menge M genau aus allen x besteht, die die Eigenschaft E haben.

Bemerkung A.3.

(a) Ist x ein Element einer Menge M, so schreiben wir $x \in M$ ("x (liegt) in M"), andernfalls schreiben wir $x \notin M$ ("x (liegt) nicht in M").

(b) Liegen alle Elemente einer Menge N auch in M, so schreiben wir $N \subseteq M$ ("N ist eine Teilmenge von M").

(c) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten: Hierbei spielen Wiederholungen und Reihenfolge keine Rolle!

Definition A.4. Seien M und N Mengen.

- Die *Vereinigung* $M \cup N$ besteht aus allen Elementen, die in M **oder** in N enthalten sind.
- Der *(Durch)-Schnitt* $M \cap N$ besteht aus allen Elementen, die in M **und** in N enthalten sind.
- Die *Differenzmenge* $M \setminus N$ (auch $M - N$) besteht aus allen Elementen von M, nachdem man alle Elemente, die in N vorkommen, entfernt hat.

Beispiel A.5. Beispiele für Mengen sind:

- $\{5, \square, 1, \text{blau}, -\pi, 5\} = \{1, \text{blau}, 5, -\pi, \square\}$
- $\{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} \subseteq \mathbb{N}$
- $\{x \mid \text{Person } x \text{ ist am 26. September 2024 an der UdS eingeschrieben}\}$
- $\emptyset = \{\}$ (die sogenannte *leere Menge*)
- $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2, 4\}$
- $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3\}$

Hingegen ist

$$\{x \mid x \text{ ist ein großer Mensch}\}$$

keine Menge, da "groß sein" kein Kriterium ist, nach dem man Zugehörigkeit zu der Menge genau entscheiden kann.

Bemerkung A.6. Oft verwenden wir Pünktchen, um anzudeuten, wie eine Menge weitergeht. Dabei muss man aufpassen, dass das Bildungsgesetz der Menge klar ersichtlich ist. Bei

$$\{3, 5, 7, \dots\}$$

könnte etwa als nächstes 9 folgen, falls wir ungerade Zahlen größer 1 meinen, aber auch 11, wenn wir ungerade Primzahlen betrachten wollen.

Beispiel A.7. Einige der wichtigsten Mengen sind Mengen von Zahlen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null.
- $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0\right\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen*.
- $\mathbb{R}$ ist die Menge aller *reellen Zahlen*. Wir können uns eine reelle Zahl als endliche oder unendliche Dezimalzahl vorstellen, etwa $\pi = 3.1415926535\ldots \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ ist die Menge der komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen werden in Abschnitt 5 näher behandelt.

Es gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Die Bezeichnungen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ werden weitestgehend einheitlich verwendet. Manche Autoren sehen allerdings die Null als natürliche Zahl.

A.3. Abbildungen/Funktionen

Definition A.8. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Wir nennen $y = f(x)$ das *Bild* von x unter f und schreiben

$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x).$$

Die Menge A heißt *Definitionsbereich* von f, B heißt *Zielbereich* von f, und $x \mapsto f(x)$ heißt *Abbildungsvorschrift* von f.

Beispiel A.9.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist eine Funktion, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet. Das Bild von $-2 \in \mathbb{R}$ unter f ist $4 \in \mathbb{R}$, geschrieben $f(-2) = 4$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist **keine** Funktion, da die Vorschrift den negativen reellen Zahlen keinen Wert zuweisen kann: Für $-1 \in \mathbb{R}$ wäre $f(x) = \sqrt{-1}$ keine reelle Zahl.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl ihre Quadratwurzel zuordnet. Das Bild von $2 \in \mathbb{N}$ unter f ist $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, geschrieben $f(2) = \sqrt{2}$.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist **keine** Funktion, da etwa $2 \in \mathbb{N}$ aus dem Definitionsbereich das Bild $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ zugewiesen würde.

A.4. Summen und Produkte

Definition A.10. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für Zahlen $a_1, \dots, a_n$ schreiben wir die Summe dieser Zahlen auch als

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n,$$

ihr Produkt als

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Als Randfälle definiert man die *leere Summe* beziehungsweise das *leere Produkt* als

$$\sum_{j=1}^{0} a_j = 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad \prod_{j=1}^{0} a_j = 1.$$

A.5. Polynome/Polynomfunktionen

Definition A.11. Ein *Polynom* oder eine *Polynomfunktion* mit reellen Koeffizienten in der Unbekannten x ist eine Abbildung

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$.

- Ist $a_n \neq 0$, so heißt a_n der *Leitkoeffizient* von p und $\operatorname{grad}(p) = \deg(p) = n$ der *Grad* von p. Der *Leitterm* von p ist $a_n x^n$.
- Ist der Leitkoeffizient von p gleich 1, so heißt p *normiert*.
- Ist $\operatorname{grad}(p) < 1$, so heißt p *konstant*.
- Die Menge aller solchen Polynome bezeichnet man mit $\mathbb{R}[x]$ und nennt sie einen *Polynomring*.
- Die $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) = 0$ nennt man *Nullstellen* von p.

Beispiel A.12.

- $p(x) = x + 3$ ist ein normiertes Polynom vom Grad 1 mit Nullstelle -3.
- $p(x) = 7x^5 + 3x^4 - 465x^3 - 11$ ist ein Polynom vom Grad 5 mit Leitkoeffizient 7.
- $p(x) = 3$ ist ein Polynom vom Grad 0 mit Leitkoeffizient 3 ohne Nullstellen.
- $p(x) = \frac{1}{x}$ ist kein Polynom.
- $p(x) = 0$ ist ein Polynom. Häufig setzt man $\deg(0) = -\infty$.

Bemerkung A.13. Jedes von Null verschiedene Polynom p hat höchstens $\operatorname{grad}(p)$ viele Nullstellen.

A.6. Winkel und Trigonometrie

Bemerkung A.14. In der Mathematik wird meistens eine Darstellung der Winkel im *Bogenmaß* (rad) statt im Gradmaß (deg) bevorzugt: 180° entsprechen π, für einen allgemeinen Winkel $\alpha = t°$ im Gradmaß hat man dementsprechend eine Darstellung im Bogenmaß als $\alpha = \frac{t}{180}\pi$. Die wichtigsten Winkel sind in Abbildung 6 dargestellt.

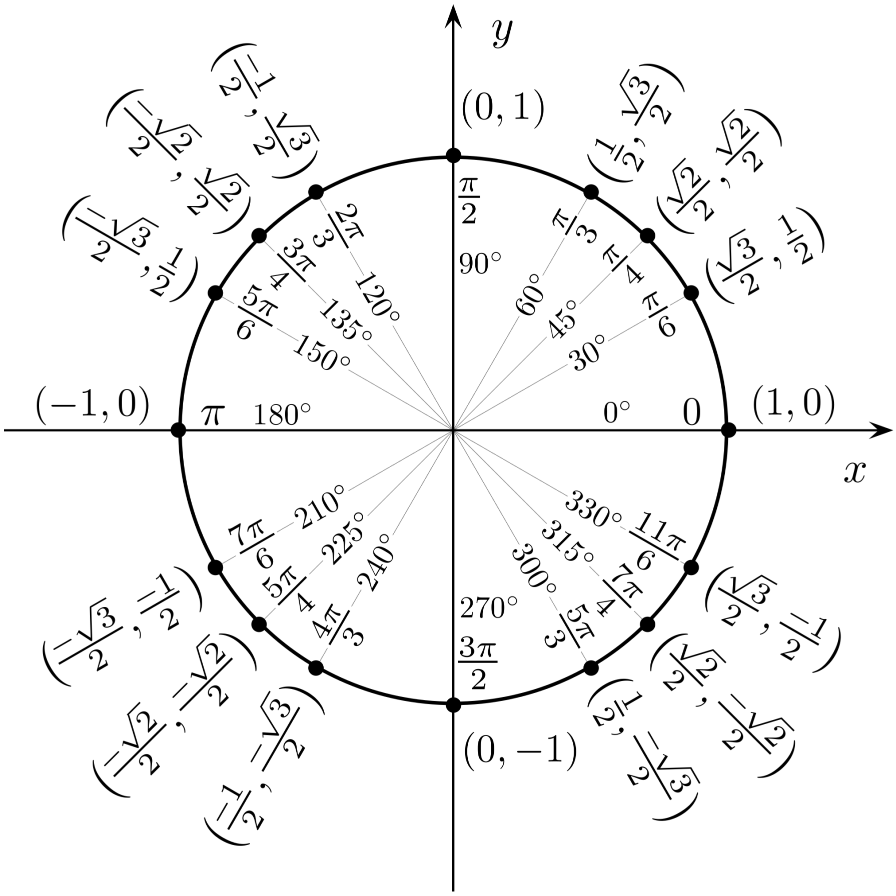


Abbildung 6: Einige Winkel φ im Gradmaß und im Bogenmaß mit den Koordinaten $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ des zugehörigen Punktes auf dem Einheitskreis. (Quelle)

Satz A.15. Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$. (Trigonometrischer Pythagoras)

(b) $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$. (Additionstheorem für Kosinus)

(c) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)$. (Additionstheorem für Sinus)

(d) $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$. (Kosinus ist eine gerade Funktion)

(e) $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$. (Sinus ist eine ungerade Funktion)

(f) $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\varphi)$ und $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\varphi)$. (Phasenverschiebungen)

(g) $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Kosinus ist 2π-periodisch)

(h) $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Sinus ist 2π-periodisch)

A.7. Polynomdivision

Bemerkung A.16. Seien $a(x)$ und $b(x)$ zwei Polynome (mit reellen oder komplexen Koeffizienten), wobei $b(x)$ nicht das Nullpolynom sei. Dann gibt es eindeutige Polynome $s(x)$ und $r(x)$ mit

$$a(x) = s(x) \cdot b(x) + r(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(b).$$

Hierbei ist r der *Rest* von a nach Division durch b. Die Berechnung von s und r aus gegebenen a und b bezeichnet man als *Polynomdivision.*

Beispiel A.17. (a) Die Polynomdivision kann analog zur schriftlichen Division durchgeführt werden, was hier anhand der Aufgabe

$$\big(\; x^3 - 12x^2 \; + 5x + 150\big) : \big(x - 5\big) = \qquad ?$$

beispielhaft erläutert wird. Im ersten Schritt fragen wir uns, mit was man den Divisor $x-5$ multiplizieren muss, damit das Resultat den gleichen Leitterm hat wie der Dividend $x^3 - 12x^2 + 5x + 150$. In diesem Fall ist dies x^2, da $x^2 \cdot (x-5) = x^3 - 5x^2$ den gleichen Leitterm hat wie $x^3 - 12x^2 + 5x + 150$. Dieser Faktor x^2 ist der erste Summand von $s(x)$:

$$\big(\; x^3 - 12x^2 \; + 5x + 150\big) : \big(x - 5\big) = x^2$$

Nun ziehen wir den schon erledigten Term $x^2 \cdot (x-5) = x^3 - 5x^2$ vom Dividenden ab (der Übersichtlichkeit halber schreibt man im Ergebnis unter dem Strich meistens nur die Terme hin, die im nächsten Schritt benötigt werden):

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & -\,12x^2 & +\,5x & +\,150\big) & : \big(x-5\big) = x^2 \\
\underline{-\,x^3} & \underline{+\,5x^2} & & & \\
 & -\,7x^2 & +\,5x & &
\end{array}$$

Jetzt wiederholen wir die vorherigen Schritte mit $-7x^2 + 5x + 150$, dem neuen Dividenden: Es gilt $-7x \cdot (x-5) = -7x^2 + 35x$, also ist $-7x$ der nächste Summand von $s(x)$ und wir ziehen $-7x^2 + 35x$ vom Dividenden ab:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & -\,12x^2 & +\,5x & +\,150\big) & : \big(x-5\big) = x^2 - 7x \\
\underline{-\,x^3} & \underline{+\,5x^2} & & & \\
 & -\,7x^2 & +\,5x & & \\
 & \underline{7x^2} & \underline{-\,35x} & & \\
 & & -\,30x & +\,150 &
\end{array}$$

Im letzten Schritt erhält man aus $-30 \cdot (x-5) = -30x + 150$ den letzten Summanden -30 von $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\; x^3 & -\,12x^2 & +\,5x & +\,150\big) & : \big(x-5\big) = x^2 - 7x - 30 \\
\underline{-\,x^3} & \underline{+\,5x^2} & & & \\
 & -\,7x^2 & +\,5x & & \\
 & \underline{7x^2} & \underline{-\,35x} & & \\
 & & -\,30x & +\,150 & \\
 & & \underline{30x} & \underline{-\,150} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Da nun unter dem Strich eine Null steht, geht die Polynomdivision in diesem Beispiel ohne Rest auf: $r(x) = 0$, also

$$x^3 - 12x^2 + 5x + 150 = (x^2 - 7x - 30)(x - 5).$$

(b) Teilt man $4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ durch $x^2 + 1$, so erhält man $4x^3 - x^2 - 2x + 2$ mit Rest $2x - 3$:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; 4x^5 - x^4 + 2x^3 \;\; + x^2 \qquad\quad - 1\big) : \big(x^2 + 1\big) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{-\,4x^5 \qquad\quad - 4x^3} \\
\qquad\quad \underline{-\,x^4 - 2x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; x^4 \qquad\quad\;\; + x^2} \\
\qquad\qquad\quad - 2x^3 + 2x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\;\; 2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\,2x^2 \qquad\; - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 2x - 3
\end{array}$$

Hier ist die Rechnung zu Ende, da $\mathrm{grad}(2x - 3) = 1 < 2 = \mathrm{grad}(x^2 + 1)$.

(c) Teilt man umgekehrt $x^2 + 1$ durch $4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$, so ist man direkt fertig, da der Dividend $x^2 + 1$ schon am Anfang einen niedrigeren Grad hat als der Divisor $4x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$. Man hat dann $s(x) = 0$ und $r(x) = x^2 + 1$.

Bemerkung A.18. Sei $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ein Polynom mit Nullstelle w. Dann ist $a(x)$ ohne Rest durch $x - w$ teilbar und das Ergebnis ist ein Polynom der Form $s(x) = s_{n-1}x^{n-1} + \ldots + s_0$. In diesem Fall kann man die Polynomdivision auch als lineares Gleichungssystem in den n Unbekannten $s_{n-1}, \ldots, s_0$ aufgefasst werden, in dem man das Polynom $s(x) \cdot (x - w)$ ausmultipliziert und koeffizientenweise mit $a(x)$ vergleicht, was $n + 1$ Gleichungen ergibt.

Beispiel A.19. Es ist $w = 5$ eine Nullstelle von $a(x) = x^3 - 12x^2 + 5x + 150$. Setzt man also $s(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ mit Unbekannten b_2, b_1, b_0 an, so gilt

$$\begin{aligned} s(x) \cdot (x - w) &= (b_2x^2 + b_1x + b_0) \cdot (x - 5) \\ &= b_2x^3 + (b_1 - 5b_2)x^2 + (b_0 - 5b_1)x - 5b_0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit $a(x) = x^3 - 12x^2 + 5x + 150$ führt auf das LGS

$$\begin{array}{rcr} b_2 &=& 1 \\ b_1 - 5b_2 &=& -12 \\ b_0 - 5b_1 \qquad &=& 5 \\ -5b_0 \qquad\qquad &=& 150 \end{array} \qquad \text{mit eindeutiger Lösung} \qquad \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Also gilt $x^3 - 12x^2 + 5x + 150 = (x^2 - 7x - 30)(x - 5)$.