Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

4. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+4P+3P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse von A und B über die reduzierte Zeilen-Stufen-Form und überprüfen Sie jeweils Ihr Ergebnis, indem Sie $A \cdot A^{-1}$ oder $A^{-1}A$ (und entsprechend für B) rechnen.

b) Lösen Sie die LGS $Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $By = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. (4P+3P+3P)

Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bringen Sie A in Zeilen-Stufenform.

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?

c) Bestimmen Sie jeweils die homogene Lösungsmenge $Ax = b$: Einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A invertierbar ist, und einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A nicht invertierbar ist.
Bemerkung: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie stattdessen $t = 1$ und $t = -1$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+4P+2P)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine Matrix B mit $BA = I_n$.

a) Welche Dimensionen hat B? D.h. bestimmen Sie $k, l \in \mathbb{N}$, sodass $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ gilt. Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie Bemerkung 2.10 a) aus der Vorlesung für quadratische Matrizen:
Sei nun zusätzlich $n = m$ und C eine Rechtsinverse von A. Zeigen Sie, dass dann bereits $B = C$ gilt.

c) Folgern Sie, dass für eine invertierbare Matrix die Inverse eindeutig ist.

Aufgabe 4. (2P+2P+1P+3P+4P)

Wir sagen eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt.

a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass dann auch $(I_n - P)$ eine Projektion ist.

b) Zeigen Sie, dass für eine Projektion $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das LGS $Px = b$ genau dann eine Lösung hat, wenn b bereits selbst eine Lösung ist.

c) Gegeben sei die Matrix

$$P := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist.

(ii) Finden Sie alle $x \in R^4$ mit $Px = 0$.

(iii) Finden Sie alle $x \in R^4$ mit $Px = x$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.