Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 13. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (je 2P)

Berechnen Sie jeweils die entsprechenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2\sqrt{x} - 3}{x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{\exp(x)}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(2\sin(x)) \cdot \cos(x)\, dx$

e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2}\, dx$

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^2-1}\, dx$

Hinweis: *Benutzen Sie für f) die Partialbruchzerlegung.*

Lösung 1.

a) Auflösen des Bruches liefert:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2\sqrt{x} - 3}{x}\, dx &= \int_1^2 x - 1 + 2x^{1/2} - \frac{3}{x}\, dx \\
&= \int_1^2 x\, dx - \int_1^2 1\, dx + \int_1^2 2x^{-1/2}\, dx - \int_1^2 frac3x\, dx \\
&= \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 1 + 2 \cdot 2(2^{1/2} - 1^{1/2}) - 3\log(2) + 3\log(1) \\
&= \frac{3}{2} - 1 + 4(\sqrt{2} - 1) - 3\log(2) = -\frac{7}{2} + 4\sqrt{2} - 3\log(2) \approx 0.0774
\end{aligned}$$

b) Wir wenden die partielle Integration auf $g'(x) = \sin(x)$ und $f(x) = x$ an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx &= \Big[-x\cos(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot (-\cos(x))\, dx \\
&= \Big[-x\cos(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \Big[\sin(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= (-\pi \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}) - (\pi \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1}) + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} \\
&= \pi + \pi = 2\pi
\end{aligned}$$

c) Wir schreiben die Funktion um und wenden zweimal partielle Integration an:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{\exp(x)}\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(2x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\exp(-x)}_{g'(x)}\, dx \\
&= \Big[\sin(2x)(-\exp(-x))\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(2x)\cdot(-\exp(-x))\, dx \\
&= 0 + 2\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(2x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\exp(-x)}_{g'(x)}\, dx \\
&= 2\cdot\left(\Big[\cos(2x)(-\exp(-x))\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-2\sin(2x))\cdot(-\exp(-x))\, dx\right) \\
&= 2(-\exp(-\pi)+\exp(\pi)) - 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\cdot\exp(-x)\, dx
\end{aligned}$$

Wir schieben den Term $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\cdot\exp(-x)\, dx$ auf die linke Seite und erhalten damit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)\cdot\exp(-x)\, dx = \frac{2}{5}\cdot(\exp(\pi) - \frac{1}{\exp(\pi)}) \quad (= \frac{4}{5}\sinh(\pi))$$

Die Funktion $\frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ wir auch Sinus hyperbolicus genannt und mit sinh bezeichnet.

d) Wir substituieren $g(x) = 2\sin(x)$ und erhalten mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \exp(2\sin(x))\cdot\cos(x)\frac{2}{2}\, dx &= \int_{2\sin(0)}^{2\sin(\pi/2)} \exp(t)\cdot\frac{1}{2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \exp(t)\, dt = \frac{1}{2}(\exp(2)-1)
\end{aligned}$$

e) Wir wollen mit $g(x) = x - 1$ substituieren. Dazu schreiben wir zuerst x^2 als Funktion von $g(x)$ mit $x^2 = (x-1+1)^2 = (g(x)+1)^2$. Nach der Substitutionsregel bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2}\, dx &= \int_2^3 \frac{(g(x)+1)^2}{(g(x))^2}\cdot \underbrace{1}_{=g'(x)}\, dx \\
&= \int_{g(2)}^{g(3)} \frac{(t+1)^2}{t^2}\, dt \\
&= \int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2}\, dt \\
&= \int_1^2 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\, dt \\
&= 1 + 2(\log(2) - \log(1)) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{1}) \\
&= \frac{3}{2} + 2\log(2)
\end{aligned}$$

f) Wir verwenden die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$ und erhalten damit:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^2}{x^2-1}\,dx &= \int_2^3 \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,dx - \int_2^3 \frac{x^2}{x+1}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{(t+1)^2}{t}\,dt - \int_3^4 \frac{(t-1)^2}{t}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 t + 2 + \frac{1}{t}\,dt - \int_3^4 t - 2 + \frac{1}{t}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(4-1) + 2 + \log(2) - \big(\frac{1}{2}(16-9) - 2 + \log(4) - \log(3)\big)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 4 - \frac{7}{2} + \log(2) - 2\log(2) + \log(3)\right) \\
&= \frac{1}{2}(2 + \log(3) - \log(2)) \approx 1{,}203
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (8P)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ jeweils eine Stammfunktion mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integrationsrechnung. Prüfen Sie anschließend nach, ob es sich tatsächlich um eine Stammfunktion handelt.

a) $f_1(x) = x^n \log(x) \quad$ für $n \in \mathbb{N}_0$

b) $f_2(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Lösung 2.

a) Wir setzen $F_1(t) := \int_1^t x^n \log(x)\,dx$. Partielle Integration liefert dann:

$$\begin{aligned}
\int_1^t \underbrace{x^n}_{u'(x)} \underbrace{\log(x)}_{v(x)}\,dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \log(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\left[x^{n+1} \log(x)\right]_1^t - \int_1^t x^n\,dx\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(t^{n+1}\log(t) - 0 - (\frac{1}{n+1} t^{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot 1)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \cdot \big((\log(t)(n+1) - 1)t^{n+1} - 1\big)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also als Stammfunktion $F_1(x) = \frac{1}{n+1}\log(x)x^{n+1} - (\frac{1}{n+1})^2 x^{n+1} - 1$ was auch

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

ein schneller Test bestätigt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
F_1'(x) &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{x}x^{n+1} + (n+1)\log(x)x^n\right) - \frac{1}{n+1}x^n \\
&= \frac{n+1}{n+1}\log(x)x^n + \frac{1}{n+1}x^n - \frac{1}{n+1}x^n \\
&= \log(x)x^n = f_1(x)
\end{aligned}$$

b) Wir setzen wieder $F_2(t) := \displaystyle\int_1^t f_2(x)\ dx$. Mit $g(x) = \frac{1}{x}$ erhalten wir

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = \frac{1}{x^3}\exp\left(\frac{1}{t}\right) = -g'(x)g(x)\exp(g(x))$$

und nach der Substitutionsregeln mit $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
F_2(t) :&= \int_1^t \frac{1}{x^3} \cdot \exp\left(\frac{1}{t}\right)\ dx \\
&= \int_{g(1)}^{g(t)} -s \cdot \exp(s)\ ds \qquad \mid \frac{1}{t} \leq 1 \\
&= \int_{1/t}^{1} \underbrace{s}_{u(s)} \cdot \underbrace{\exp(s)}_{v'(s)}\ ds \\
&= \left(\Big[x \cdot \exp(x)\Big]_{1/t}^{1} - \int_{1/t}^{1} \exp(s)\ ds\right) \\
&= \exp(1) - \frac{1}{t}\exp\left(\frac{1}{t}\right) - (\exp(1) - \exp\left(\frac{1}{t}\right)) \\
&= (1 - \frac{1}{t})\exp(\frac{1}{t})
\end{aligned}$$

Ein kurzer Test liefert wieder

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &= \left(\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(\frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^3} = f_2(t)
\end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 09. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (5P+5P)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Sei weiterhin f ungerade, dass heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = -f(x)$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $a \in \mathbb{R}$ bereits $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$ gilt.

b) Sei f gerade, dass heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(-x)$. Sei weiterhin F eine Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann F eine ungerade Funktion ist.

Lösung 3.

a) Wir benutzen zuerst die Zerlegung und anschließend substituieren wir $g(x) = -x$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\ dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= \int_{a}^{0} -f(-x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= \int_{0}^{a} \underbrace{f(-x)}_{=-f(x)}\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = 0\end{aligned}$$

b) Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt für $x \geq 0$:

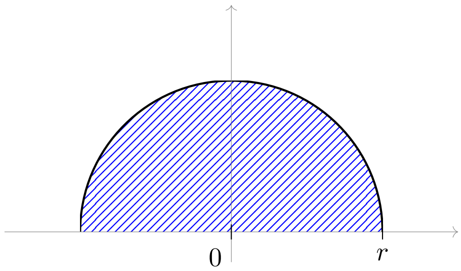
$$F(x) = F(x) - F(0) = \int_{0}^{x} f(t)\ dt$$

$$\begin{aligned}F(-x) &= F(0) - F(-x) \\ &= 0 - \int_{-x}^{0} f(t)\ dt = \int_{-x}^{0} -f(t)\ dt \\ &= \int_{x}^{0} f(-t)\ dt = -\int_{0}^{x} f(-t)\ dt \\ &= -\int_{0}^{x} f(t)\ dt = -F(x)\end{aligned}$$

wobei wir im Schritt von der zweiten auf die dritte Zeile $g(x) = -x$ substituieren.

Aufgabe 4. (5P+5P)

a) Sei $A(r)$ der Flächeninhalt eines Halbkreises vom Radius r.



Zeigen Sie, dass $A(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$ gilt.

Hinweis: *Die Punkte* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *auf dem Kreis mit Radius* r *und Mittelpunkt* 0 *sind durch die Gleichung* $x^2 + y^2 = r^2$ *festgelegt.*

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$ indem Sie mit $x = r \cdot \cos(t)$ substituieren.
Hinweis: *Benutzen Sie während der Rechnung die Gleichung* $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ *und die aus der Vorlesung bekannte Stammfunktion* $\int \sin(x)^2\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$.

Lösung 4.

a) Lösen wir $x^2 + y^2 = r^2$ nach $y := f(x)$ auf, erhalten wir, dass der obere Rand des Kreises mit Radius r um den Nullpunkt genau der Graph der Funktion $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist. Nach Vorlesung ist $\int_{-r}^{r} f(x)\ dx$ der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse. Das ist aber gerade die obere Hälfte des Kreises mit Radius r um den Nullpunkt.

b) Wir folgen dem Hinweis und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx &= \int_{r\cos(\pi}^{r\cos(0)} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos(t)^2} \cdot (-r\sin(t))\ dt \\
&= -\int_{0}^{\pi} r \cdot \sqrt{1 - \cos(t)^2} \cdot (-r\sin(t))\ dt \\
&= r^2 \int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin(t)^2}\sin(t))\ dt \\
&= r^2 \int_{0}^{\pi} |\underbrace{\sin(t)}_{\geq 0}| \cdot \sin(t))\ dt \\
&= r^2 \int_{0}^{\pi} \sin(t)^2\ dt \\
&= r^2 \Big(\frac{1}{2}(\pi - \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\cos(\pi)) - \frac{1}{2}(0 - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\cos(0)\Big) \\
&= r^2 \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$