Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 12. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+3P+1P+4P)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) - x.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f.

b) Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum bei $x = 0$ hat.

c) Folgern Sie hieraus, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\exp(x) \geq x + 1$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (0, \infty)$ die Ungleichung $\log(x) \leq x - 1$ gilt.

Lösung 1.

a) Wir bestimmen zuerst die möglichen Extremstellen von f als die Nullstellen der Ableitung $f'(x) = \exp(x) - 1$. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ ist durch die Gleichung $\exp(x) - 1 = 0 \iff \exp(x) = 1 \iff x = \log(1) = 0$ gegeben. Zweifaches Ableiten ergibt $f''(x) = \exp(x) \Rightarrow f''(0) = 1 > 0$, also ist 0 ein lokales Minimum und die einzige lokale Extremstelle.

b) Wir betrachten $f'(x) = \exp(x) - 1$ für $x < 0$ und $x > 0$. Da exp streng monoton ist und $\exp(0) = 1$, ist $\exp(x) - 1 < \exp(0) - 1 = 0$ für $x < 0$ und $\exp(x) - 1 > \exp(0) - 1 = 0$ für $x > 0$. Also ist f streng monoton fallend für $x < 0$ und streng monoton steigend für $x > 0$ und damit $f(x) > f(0)$ für alle $x > 0$ und $x < 0$. Insbesondere ist damit 0 eine globales Minimum.

c) Wegen $\exp(x) - x = f(x) \geq f(0) = \exp(0) - 0 = 1$ folgt direkt $\exp(x) - x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $\exp(x) \geq x + 1$.

d) Wir gehen wie in a) bis c) vor und erhalten als Extremstelle von $g(x) = \log(x) - x$ die Stelle

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \iff \frac{1}{x} = 1 \iff x = 1.$$

Da für $x < 1$ gilt $g'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>1} - 1 > 0$ und für $x > 1$ gilt $g'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{<1} - 1 < 0$ ist 1 ein globales Maximum von $g(x)$ und damit $g(x) \leq g(1) = \log(1) - 1 = -1$ für alle $x \in (0, \infty)$. Insbesondere ist damit $\log(x) - x \leq -1 \iff \log(x) \leq x - 1$.

Aufgabe 2. (4P+3P+3P)

Der Energieverbrauch pro Strecke und Gewicht (d.h. in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{km}}$) von Zugvögeln wurde in Abhängigkeit von ihrer Fluggeschwindigkeit $v \in (0,\infty)$ durch Pennycuick mit der Formel

$$E(v) = Av + \frac{B}{v}$$

für zwei Konstanten $A, B \in (0,\infty)$ beschrieben.[1]

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von A und B die optimale Reisegeschwindigkeit eines Zugvogels, d.h. die Fluggeschwindigkeit mit dem niedrigsten Energieverbrauch.

b) Für zwei Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ sagen wir f nähert sich bei b asymptotisch gegen g an, wenn ihre Differenz den Grenzwert $\lim\limits_{x\to b}(f(x) - g(x)) = 0$ hat.
Zeigen Sie, dass sich der Energieverbrauch $E(v)$ bei Unendlich asymptotisch einer Geraden $g(x) = mx + c$ annähert.

c) Bestimmen Sie $\lim_{v\to 0} E(v)$ und $\lim_{v\to\infty} E(v)$ und skizzieren den Graphen der Funktion E indem Sie die Ergebnisse von a) und b) verwenden.

Lösung 2.

a) Es muss also $E'(v) = 0$ und $E''(v) > 0$ gelten. Ableiten liefert

$$E'(v) = A - \frac{B}{v^2} \overset{!}{=} 0 \iff \qquad A = \frac{B}{v^2} \iff v^2 = \frac{B}{A}$$
$$\iff v = \sqrt{\frac{B}{A}} \qquad |\ \text{da } v > 0$$

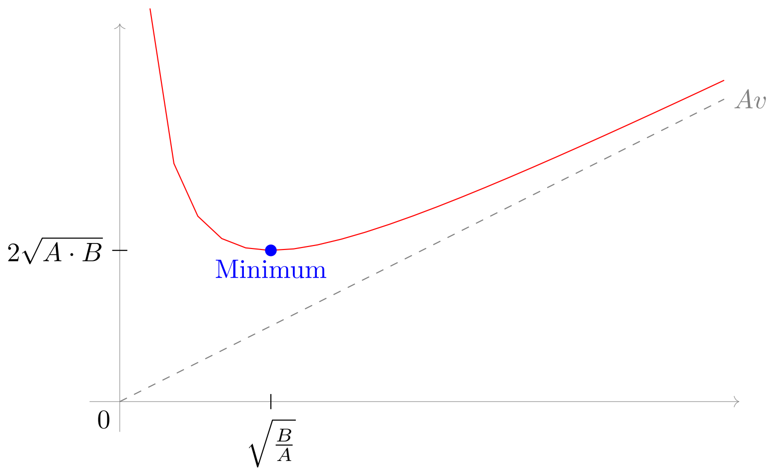
Da $v, B > 0$ ist $E''(v) = 2\frac{B}{v^3} > 0$ für alle v, B und damit ist $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ein lokales Minimum. Für $v < \sqrt{\frac{B}{A}}$ ist $E'(v) = A - \frac{B}{v^2} \geq A - \frac{B}{\frac{B}{A}} = A - A = 0$ und für $v > \sqrt{\frac{B}{A}}$ entsprechend $E'(v) > 0$, also ist bei $v = \sqrt{\frac{B}{A}}$ sogar ein globales Minimum.

b) Für $v \to \infty$ geht der Term $\frac{B}{v}$ gegen 0. Also ist $E(v) - \underbrace{A \cdot v}_{=:g(v)} = \frac{B}{v} \xrightarrow{v\to\infty} 0$ und damit nähert sich $E(v)$ asymptotisch der Geraden $g(v) = A \cdot v$ an.

c) Wir haben $v \xrightarrow{v\to 0} 0$ und $\frac{1}{v} \xrightarrow{v\to 0} 0$. Nach den Regeln der Konvergenz gilt also damit $\lim_{x\to 0} E(x) = \infty$. Genauso erhalten wir wegen $v \xrightarrow{v\to\infty} \infty$ und $\frac{1}{v} \xrightarrow{v\to 0} \infty$ auch $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$. Wegen a) haben wir bei $v = \sqrt{\frac{B}{A}}$ ein globales Minimum mit $E(\sqrt{\frac{B}{A}}) = A \cdot \sqrt{\frac{B}{A}} + B\sqrt{\frac{A}{B}} = 2\sqrt{A \cdot B}$.

[1] A und B hängen hier u.a. von der Luftdichte, Gewicht des Vogels und Flügelform ab.

Wenn v steigt, dann nähert sich der Graph nach b) der Geraden Av an. Für den Graphen ergibt das dann das Bild:



Aufgabe 3. (2P+3P+2P+3P)

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ eine (normierte) Polynomfunktion mit $a_n = 1$.

a) Zeigen Sie, dass f höchstens $n-1$ lokale Extremstellen hat.
Hinweis: *Sie dürfen benutzen, dass ein Polynom von Grad n höchstens n Nullstellen hat.*

b) Sei zusätzlich $\deg(f) = n$ eine ungerade Zahl. Geben Sie mit einer kurzen Begründung an, ob f globale Extremstellen hat.

c) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann g entweder nur positive oder negative Werte annimmt, d.h. es gilt für alle $x \in [a, b]$ entweder $g(x) \geq 0$ oder $g(x) \leq 0$.

d) Zeigen Sie, dass wenn $\deg(f) = n$ eine gerade Zahl ist, dann hat f mindestens ein lokales Minimum.

Lösung 3.

a) Die Ableitung $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$ ist selbst wieder ein Polynom von Grad $n-1$ und hat nach dem Hinweis maximal $n-1$ Nullstellen. Da f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, ist jede Extremstelle von f auch eine Nullstelle von f', also können wir auch nur höchsten $n-1$ Extremstellen haben.

b) Es gilt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Um das genau zu machen (das war hier nicht nötig) können wir $f(x)$ für $x \neq 0$ schreiben als

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x^n}_{\to \infty} \cdot \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{n-i}}}_{\to 0} \right) = \infty$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Wir benutzen hier $\frac{1}{x^k} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und $x^n \xrightarrow{x\to\infty} \infty$. Aus den Konvergenzsätzen folgt dann $\frac{a}{x^k} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und damit $1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \xrightarrow{x\to\infty} 1$, also $x^n \cdot (1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}}) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$. Für $x \to -\infty$ gilt $x^n \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$ da n ungerade ist und entsprechend der Rest.

Also ist $f(x)$ nach oben und unten unbeschränkt, d.h. für jedes $M := f(x)$ existieren ein $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > M > f(b)$, insbesondere hat damit $f(x)$ keine globalen Maxima oder Minima.

c) Angenommen die Aussage wäre falsch, dann gäbe es $x, y \in [a, b]$ mit $g(y) < 0 < g(x)$. Wir gehen nun davon aus, dass $y < x$ gilt, der Rest geht bis auf vertauschen von x und y sonst genaus. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $c \in (y, x) \subseteq (a, b)$ mit $g(c) = 0$ was aber $g(c) \neq 0$ für alle $c \in (a, b)$ widerspricht.

d) Da $f'(x)$ ein Polynom von ungeradem Grad ist, hat es nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle x_0. Wir müssen nun zeigen, dass $f'(x)$ an mindestens einer der Nullstellen einen Vorzeichenwechsel hat. Seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ die Nullstellen von $f'(x)$ (da $f'(x)$ ein Polynom ist, sind das endlich viele und $k < n-1$). $f'(x)$ ist ein Polynom mit ungeradem Grad und Leitkoeffizient $n > 0$, also ist wie in b) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$. Nach c) ist also $f'(x)$ im Intervall $(-\infty, x_0)$ immer negativ und im Intervall (x_k, ∞) immer positiv. Insbesondere hat f' einen Vorzeichenwechsel im Intervall (x_0, x_k). Da die x_i alle Nullstellen von f' sind, hat nach c) f' keine Vorzeichenwechsel in den Teilintervallen (x_i, x_{i+1}), also muss der Vorzeichenwechsel bereits an einer der Nullstellen x_i passieren und wir haben damit $f'|_{(x_{i-1}, x_i)} \leq 0$ und $f'|_{(x_i, x_{i+1})} \geq 0$. Nach Vorlesung ist damit x_i ein lokales Minimum von f.

Aufgabe 4. (2P+2P+3P+3P)

Berechnen Sie jeweils für die Funktionen f_i den Grenzwert bei x_i:

a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \quad$ mit $x_1 := 0$

b) $f_2 : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\exp(x) - 1}{\sin(x) \cdot \cos(x)} \quad$ mit $x_2 := 0$

c) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\log(x)}{\sqrt{x}} \quad$ mit $x_3 := \infty$.

d) $f_4 : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2}{(\cos(x))^2 - 1} \quad$ mit $x_4 := 0$

Lösung 4.

Wir verwenden jeweils die Regel von L'Hospital bei ($\star$). Jeweils ein kurzer Check liefert, dass wir die Voraussetzungen erfüllen, insbesondere sind alle Funktionen beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen vom Quotienten im Definitionsbereich verschwinden nicht. Wir schreiben jeweils die Funktionen als Quotienten $f_i(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)}$ mit den offensichtlichen g_i und h_i.

a) Wegen $g_1'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$ und $h_1'(x) = 1$ erhalten wir wegen der Stetigkeit von $\cos(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

b) $g_2'(x) = \exp(x)$ und $h_2'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)$. Wieder wegen der Stetigkeit der gegebenen Funktionen und $h_2'(x) \neq 0$ erhalten wir mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{\sin(x) \cdot \cos(x)} \overset{(\star)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x)}{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)}$$

$$= \frac{\exp(0)}{\cos(0)\cos(0) - \sin(0)\sin(0)} = \frac{1}{1-0} = 1$$

c) $g_3'(x) = \frac{1}{x}$ und $h_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Es gilt also

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} \overset{(\star)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

d) $g_4'(x) = 2x$ und $h_4'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$. Da hier $h_4'(0) = 0 = g_4'(0)$ können wir noch nicht direkt L'Hospital anwenden (wir sehen noch nicht, dass der Bruch davon konvergiert). Wir leiten nochmal ab und erhalten

$$g_4''(x) = 2 \quad \text{und} \quad h_4''(x) = 2(\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x))$$

Damit erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos(x)^2 - 1} \overset{(\star)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{2\sin\cos(x)} \overset{(\star)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2}{2(\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x))} = \frac{2}{-2} = -1$$