Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 11. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+3P+4P)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \cdot \exp(x) - 5\sin(x).$$

Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $[0,3]$ den Wert π annimmt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = \pi$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 7x^4 - 3x^3 + 5x - 4.$$

Zeigen Sie, dass g mindestens zwei Nullstellen hat.

c) Sei $h : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass h einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x \in [0,1]$ mit $h(x) = x$.[1]

Lösung 1.

a) f ist als Komposition von stetigen Funktionen selbst wieder stetig. Wir können daher den Zwischenwertsatz anwenden. Es gilt $f(0) = 0 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 0 < \pi$ und $f(2) = 2^3 \cdot \exp(2) - 5\sin(2) > 8 \cdot \exp(2) - 5 > \pi$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = \pi$.

b) Da g ein Polynom ist, ist es insbesondere stetig. Es gilt $g(-1) = 7 + 3 - 5 - 4 = 1 > 0$ und $g(0) = -4 < 0$, also hat g nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[-1,0]$. Für die zweite Nullstelle haben wir $g(1) = 7 - 3 + 5 - 4 = 5 > 0$, also haben wir wider nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle in $[0,1]$. Da $f(0) \neq 0$ ist, sind die zwei Nullstellen insbesondere verschieden.

c) Wir betrachten die Funktion $H(x) = h(x) - x$. Da h stetig ist, ist auch H stetig. Da $h(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ haben wir die beiden Ungleichungen

$$H(0) = h(0) \geq 0 \text{ und } H(1) = h(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat dann H eine Nullstelle $x_0 \in [0,1]$, also gilt $0 = H(x_0) = h(x_0) - x_0$ und damit $h(x_0) = x_0$.

[1] Wenn wir hier offene Intervalle benutzen gilt die Aussaqe nicht, z.B. $\tilde{h} : (0,1) \to (0,1), x \mapsto x/2$ hat keinen Fixpunkt in $(0,1)$, denn der einzige Fixpunkt wäre $x_0 = 0 \notin (0,1)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (1P+3P+2P)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1) \cup [2,3) \to [0,2), \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ x-1, & \text{falls } x \in [2,3) \end{cases}$$

a) Begründen Sie, dass f überall stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f invertierbar ist, indem Sie die Umkehrfunktion f^{-1} angeben und zeigen, dass es tatsächlich die Umkehrfunktion ist.

c) Ist f^{-1} überall stetig?

Lösung 2.

a) Sei $x \in D := [0,1) \cup [2,3)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Ist $x \in [0,1)$, dann muss also ab einem $N \in \mathbb{N}$ bereits $x_n \in [0,1)$ für alle $n \geq N$ gelten und damit $f(x_n) = x_n \to x = f(x)$. Ist $x \in [2,3)$, dann gilt entsprechend $x_n \in [2,3)$ ab einem N und $f(x_n) = x_n - 1 \to x - 1 = f(x)$. Also ist f auf dem Definitionsbereich konvergent und damit stetig.

b) Bildlich gesprochen verschiebt f das Intervall $[2,3)$ um 1 nach links. Die Umkehrfunktion macht das rückgängig, verschiebt also das Teilintervall $[1,2)$ um 1 nach rechts und lässt den Rest gleich. Wir erhalten also

$$f^{-1} : [0,2) \to [0,1) \cup [2,3), \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ x+1, & \text{falls } x \in [1,2) \end{cases}$$

Eine kurze Probe für ergibt:

$$\begin{aligned} x \in [0,1) :& f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x \\ x \in [2,3) :& f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\underbrace{x-1}_{\in[1,2)}) = x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [0,1) :& f(f^{-1}(x)) = f(x) = x \\ x \in [1,2) :& f(f^{-1}(x)) = f(\underbrace{x+1}_{\in[2,3)}) = x + 1 - 1 = x \end{aligned}$$

c) f^{-1} ist nicht stetig in 1, denn $f^{-1}(1) = 1 + 1 = 2$, aber für $x_n = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ gilt $f^{-1}(x_n) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 2 = f^{-1}(1)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+4P+2P)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass f auch an der Stelle 0 differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle 0 nicht stetig ist.

Lösung 3.

a) Da $f(x) = g(x) \cdot \underbrace{(h_1 \circ h_2)}_{h:=}(x)$ mit $g(x) = x^2$, $h_1(x) = \sin(x)$ und $h_2(x) = \frac{1}{x^2}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ aus differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt ist, erhalten wir mit der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot (h_1'(h_2(x)) \cdot h_2'(x)) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{-2x}{x^4} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

b) An der Stelle 0 betrachten wir die Definition von differenzierbar und erhalten für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n^2}\right)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \sin\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$$

was wegen dem Sandwichlemma und $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ gegen 0 konvergiert. Damit ist $\lim_{x\to 0} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = 0$ und insbesondere f an der Stelle 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

c) Das sieht man auch schon direkt ohne die b), denn in a) erhalten wir für $x_n = \sqrt{\frac{1}{n\cdot\pi}}$ bereits $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= 2x_n \sin(\pi n) - 2\sqrt{n\cdot\pi} \cos(n \cdot \pi) \\ &= 0 - 2\sqrt{n\cdot\pi} \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

was unbestimmt divergiert und insbesondere nicht gegen $f'(0) = 0$ konvergiert.

Aufgabe 4. (1P+3P+2P+3P)

Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion:

$$f_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a = \exp(a \log(x)).$$

a) Begründen Sie, dass f_a für alle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f_a diffenerentierbar ist und zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln

$$f_a'(x) = a \cdot x^{a-1}.$$

c) Zeigen Sie, dass f_a für $a \neq 0$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f_a^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$ ist.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel für die Ableitung der Inversen $(f_a^{-1})'(x)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Lösung 4.

a) f_a ist als Verknüpfung von stetigen Funktionen stetig.
Alternativ ist nach b) f_a differentierbar und damit insbesondere stetig.

b) Wegen der Kettenregel und Skalarmultiplikation ist $f_a(x)$ differenzierbar und wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \exp'(a \log(x)) \cdot ((a \log)'(x)) \\ &= \exp(a \log(x)) \cdot a \frac{1}{x} \\ &= \exp(a \log(x)) \cdot a \cdot \exp(-1 \log(x) \\ &= a \cdot \exp((a-1) \log(x)) = a \cdot x^{a-1} \end{aligned}$$

c) Einsetzen ergibt für $a \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f_a(f_{\frac{1}{a}}(x)) = f_a(x^{\frac{1}{a}}) = (x^{\frac{1}{a}})^a = x^{a \cdot \frac{1}{a}} = x^1 = x$$

Vertauschen von a mit $\frac{1}{a}$ liefert auch $f_{\frac{1}{a}}(f_a(x)) = x$ und damit $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

d) Nach der Ableitungsregel für Inverse erhalten wir:

$$\begin{aligned} (f_a^{-1})'(x) &= \frac{1}{f_a'(f_{\frac{1}{a}}(x))} &= \frac{1}{f_a'(x^{\frac{1}{a}})} \\ &= \frac{1}{a \cdot (x^{\frac{1}{a}})^{a-1}} &= \frac{1}{a \cdot x^{\frac{a-1}{a}}} \\ &= \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{-(a-1}{a}} &= \frac{1}{a} \cdot x^{-1+\frac{1}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{1}{a}-1} \end{aligned}$$

also genau das Gleiche wie mit der Formel aus b).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 5. (2P+2P+3P)

Auf dem offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist die Tangensfunktion definiert über

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass tan differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $\tan'(x)$.

b) Zeigen Sie, dass die Tangensfunktion auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ invertierbar ist. Man nennt die Umkehrfunktion Arkustangens und schreibt dafür $\arctan := \tan^{-1}$.
Hinweis: *Sie dürfen hierzu folgenden Satz benutzen:*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f bereits streng monoton wachsend.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

mit Hilfe der Ableitungsregeln.

Lösung 5.

a) Nach der Quotientenregel ist tan differenzierbar, da $\cos(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt und sowohl cos als auch sin differenzierbar sind. Nach der Quotientenregel gilt dann:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2}\\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2}\\ &= 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \tan(x)^2\end{aligned}$$

Auch in Ordnung wäre $\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ wenn man die Gleichung $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ benutzt.

b) Wegen $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0$ für alle x, ist tan streng monoton steigend. Nach a) ist tan differenzierbar und insbesondere stetig, also existiert nach Satz 6.25 aus der Vorlesung eine stetige Inverse. (**Alternativ** können wir das auch direkt begründen, bekommen aber dann nicht direkt, dass arctan stetig ist: Da tan streng monoton ist, ist $\tan(x)$ injektiv, d.h. aus $\tan(x) = \tan(y)$ folgt direkt $x = y$).

Wegen $\cos(x) \overset{x\to\pm\pi/2}{\longrightarrow} 0$, $\cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\sin(x) \overset{x\to\pm\pi/2}{\longrightarrow} \pm 1$ haben wir $\tan(x) \overset{x\to\pm\pi/2}{\longrightarrow} \pm\infty$ und nach dem Zwischenwertsatz ist $\mathrm{Bild}(\tan) = \mathbb{R}$. Also ist tan invertierbar.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

c) Wir haben nach den Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \overset{a)}{=} \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung $\tan(\arctan(x)) = x$ benutzt haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.