

## 13. ÜBUNGSBLATT ZUR MATHEMATIK FÜR STUDIERENDE DER BIOLOGIE UND DES LEHRAMTES CHEMIE IM WS 2023/24

### Aufgabe 1. (je 2P)

Berechnen Sie jeweils die entsprechenden Integrale:

a)  $\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2\sqrt{x} - 3}{x} dx$

d)  $\int_0^{\pi/2} \exp(2 \sin(x)) \cdot \cos(x) dx$

b)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(x) dx$

e)  $\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{\exp(x)} dx$

f)  $\int_2^3 \frac{x^2}{x^2 - 1} dx$

**Hinweis:** Benutzen Sie für f) die Partialbruchzerlegung.

### Aufgabe 2. (8P)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils eine Stammfunktion mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integrationsrechnung. Prüfen Sie anschließend nach, ob es sich tatsächlich um eine Stammfunktion handelt.

a)  $f_1(x) = x^n \log(x)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$

b)  $f_2(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

### Aufgabe 3. (5P+5P)

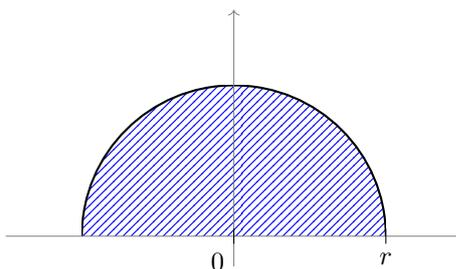
Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

a) Sei weiterhin  $f$  ungerade, das heißt für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(-x) = -f(x)$ . Zeigen Sie, dass dann für jedes  $a \in \mathbb{R}$  bereits  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$  gilt.

b) Sei  $f$  gerade, das heißt für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = f(-x)$ . Sei weiterhin  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  mit  $F(0) = 0$ . Zeigen Sie, dass dann  $F$  eine ungerade Funktion ist.

**Aufgabe 4. (5P+5P)**

- a) Sei  $A(r)$  der Flächeninhalt eines Halbkreises vom Radius  $r$ .



Zeigen Sie, dass  $A(r) = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  gilt.

**Hinweis:** Die Punkte  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  auf dem Kreis mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $0$  sind durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  festgelegt.

- b) Berechnen Sie das Integral  $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  indem Sie mit  $x = r \cdot \cos(t)$  substituieren.

**Hinweis:** Benutzen Sie während der Rechnung die Gleichung  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$  und die aus der Vorlesung bekannte Stammfunktion  $\int \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$ .