Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+3P+1P+4P)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) - x.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f.

b) Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum bei $x = 0$ hat.

c) Folgern Sie hieraus, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\exp(x) \geq x + 1$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (0, \infty)$ die Ungleichung $\log(x) \leq x - 1$ gilt.

Aufgabe 2. (4P+3P+3P)

Der Energieverbrauch pro Strecke und Gewicht (d.h. in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{km}}$) von Zugvögeln wurde in Abhängigkeit von ihrer Fluggeschwindigkeit $v \in (0, \infty)$ durch Pennycuick mit der Formel

$$E(v) = Av + \frac{B}{v}$$

für zwei Konstanten $A, B \in (0, \infty)$ beschrieben.[1]

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von A und B die optimale Reisegeschwindigkeit eines Zugvogels, d.h. die Fluggeschwindigkeit mit dem niedrigsten Energieverbrauch.

b) Für zwei Funktionen $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sagen wir f nähert sich bei b asymptotisch gegen g an, wenn ihre Differenz den Grenzwert $\lim\limits_{x \to b}(f(x) - g(x)) = 0$ hat.
Zeigen Sie, dass sich der Energieverbrauch $E(v)$ bei Unendlich asymptotisch einer Geraden $g(x) = mx + c$ annähert.

c) Bestimmen Sie $\lim_{v \to 0} E(v)$ und $\lim_{v \to \infty} E(v)$ und skizzieren den Graphen der Funktion E indem Sie die Ergebnisse von a) und b) verwenden.

[1] A und B hängen hier u.a. von der Luftdichte, Gewicht des Vogels und Flügelform ab.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+3P+2P+3P)

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ eine (normierte) Polynomfunktion mit $a_n = 1$.

a) Zeigen Sie, dass f höchstens $n-1$ lokale Extremstellen hat.
Hinweis: *Sie dürfen benutzen, dass ein Polynom von Grad n höchstens n Nullstellen hat.*

b) Sei zusätzlich $\deg(f) = n$ eine ungerade Zahl. Geben Sie mit einer kurzen Begründung an, ob f globale Extremstellen hat.

c) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann g entweder nur positive oder negative Werte annimmt, d.h. es gilt für alle $x \in [a,b]$ entweder $g(x) \geq 0$ oder $g(x) \leq 0$.

d) Zeigen Sie, dass wenn $\deg(f) = n$ eine gerade Zahl ist, dann hat f mindestens ein lokales Minimum.

Aufgabe 4. (2P+2P+3P+3P)

Berechnen Sie jeweils für die Funktionen f_i den Grenzwert bei x_i:

a) $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \quad$ mit $x_1 := 0$

b) $f_2 : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\exp(x) - 1}{\sin(x) \cdot \cos(x)} \quad$ mit $x_2 := 0$

c) $f_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\log(x)}{\sqrt{x}} \quad$ mit $x_3 := \infty$.

d) $f_4 : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x^2}{(\cos(x))^2 - 1} \quad$ mit $x_4 := 0$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 02. 02. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.