Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 10. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+4P+4P)

Bestimmen Sie die Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:

a) $\log(x-1) = \log(4x) - 3$ b) $3 \cdot 4^{5x} = 6^{x+7}$ c) $3^{(5^x)} = 5^{(3^x)}$

Bemerkung: *Geben Sie die Lösung ähnlich der Form* $x = \frac{\log(3)+\log(4)}{\log(\log(5)+1)}$ *an.*

Lösung 1.

a) Wir wenden auf beiden Seiten die Exponentialfunktion an (da diese umkehrbar ist, ändert das nicht die Lösungsmenge) und erhalten:

$$\begin{aligned}
& & \log(x-1) &= \log(4x) - 3 & &\mid \exp \\
&\iff & x-1 &= \exp(\log(4x) - 3) & & \\
&\iff & x-1 &= \exp(\log(4x)) \cdot \frac{1}{e^3} & & \\
&\iff & x-1 &= \frac{4x}{e^3} & &\mid -x \\
&\iff & (\frac{4}{e^3} - 1)x &= -1 & & \\
&\iff & \frac{4-e^3}{e^3} \cdot x &= -1 & &\mid \cdot \frac{e^3}{4-e^3} \\
&\iff & x &= \frac{e^3}{e^3-4} \approx 1,25 & &
\end{aligned}$$

b) Wir verwenden hier $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$ und $\log_a(a^x) = x$ und erhalten damit:

$$\begin{aligned}
& & 3 \cdot 4^{5x} &= 6^{x+7} & &\mid \log \\
&\iff & \log(3 \cdot 4^{5x}) &= \log(6^{x+7}) & & \\
&\iff & \log(3) + \log(4^{5x}) &= \log(6^x) + \log(6^7) & & \\
&\iff & \log(3) + \frac{\log(4^{5x})}{\log(4)} \cdot \log(4) &= \frac{\log(6^{x+7})}{\log(6)} \cdot \log(6) & & \\
&\iff & \log(3) + \log_4(4^{5x}) \cdot \log(4) &= \log_6(6^{x+7}) \log(6) & & \\
&\iff & \log(3) + 5x \cdot \log(4) &= x \log(6) + 7 \log(6) & &\mid -x\log(6) - \log(3) \\
&\iff & 5x \cdot \log(4) - x\log(6) &= 7\log(6) - \log(3) & & \\
&\iff & x(5\log(4) - \log(6)) &= 7\log(6) - \log(3) & &\mid : (5\log(4) - \log(6)) \\
&\iff & x &= \frac{7\log(6) - \log(3)}{5\log(4) - \log(6)} \approx 2,23 & &
\end{aligned}$$

Alternativ: kann man hier auch $\log(a^x) = x\log(a)$ verwenden und erhält:

$$\begin{aligned}
& & 3 \cdot 4^{5x} &= 6^{x+7} & &\mid \log \\
&\iff & \log(3 \cdot 4^{5x}) &= \log(6^{x+7}) & & \\
&\iff & \log(3) + \log(4^{5x}) &= \log(6^x) + \log(6^7) & & \\
&\iff & \log(3) + 5x\log(4) &= x\log(6) + 7\log(6) & &\mid -x\log(6) - \log(3) \\
&\iff & x(5\log(4) - \log(6)) &= 7\log(6) - \log(3) & &\mid : (5\log(4) - \log(6)) \\
&\iff & x &= \frac{7\log(6) - \log(3)}{5\log(4) - \log(6)} \approx 2,23 & &
\end{aligned}$$

c) Wir gehen wie in b) vor und erhalten:

$$\begin{aligned}
& & 3^{(5^x)} &= 5^{(3^x)} & &\mid \log \\
&\iff & \frac{\log(3^{(5^x)})}{\log(3)} \cdot \log(3) &= \frac{\log(5^{(3^x)})}{\log(5)} \cdot \log(5) & & \\
&\iff & \log_3(3^{(5^x)}) \cdot \log(3) &= \log_5(5^{(3^x)}) \cdot \log(5) & & \\
&\iff & 5^x \cdot \log(3) &= 3^x \cdot \log(5) & &\mid \log \\
&\iff & \log(5^x \cdot \log(3)) &= \log(3^x \cdot \log(5)) & & \\
&\iff & \log(5^x) + \log(\log(3)) &= \log(3^x) + \log(\log(5)) & & \\
&\iff & \log_5(5^x)\log(5) + \log(\log(3)) &= \log_3(3^x)\log(3) + \log(\log(5)) & & \\
&\iff & x\log(5) + \log(\log(3)) &= x\log(3) + \log(\log(5)) & &\mid -x\log(3) - \log(\log(3)) \\
&\iff & x(\log(5) - \log(3)) &= \log(\log(5)) - \log(\log(3)) & &\mid : (\log(5) - \log(3) \\
&\iff & x &= \frac{\log(\log(5)) - \log(\log(3))}{\log(5) - \log(3)} \approx 0.75 & &
\end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 19. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (je 2P=10P)

Ferdinand beobachtet eine Bakterienkultur in einer Petrischale. Zu Beginn der Beobachtung zählt er 12 000 Bakterien in der Schale[1] und stellt fest, dass sich alle 15 Minuten die Bakterienpopulation verdoppelt bis die Schale komplett voll ist.

a) Um 17:00 Uhr stellt er fest, dass die Schale zur Hälfte voll ist.

   (i) Um wie viel Uhr ist die Schale komplett voll?

   (ii) Ferdinand reagiert schnell und siedelt um 17:10 Uhr die Bakterienkultur in eine doppelt so große Schale um. Um wie viel Uhr ist diese voll?

b) Während Ferdinands Beobachtung lässt sich die Bakterienanzahl $B(t)$ nach t Minuten beschreiben als

$$B(t) = B_0 \cdot a^t.$$

Bestimmen Sie die Parameter a und B_0.

c) Wie viele Bakterien zählt Ferdinand nach 5 Minuten (aufgerundet)? Wie viele nach 2 Stunden?

d) Wie lange muss Ferdinand warten, bis in der Petrischale 1 Million Bakterien sind?

e) Als die Schale zu einem Zehntel gefüllt ist, macht Ferdinand einen Ausflug. Wie lange war er höchstens unterwegs, wenn er um 17 Uhr wieder da war?

Lösung 2.

a) (i) Da sich die Bakterien alle 15 Minuten verdoppeln und um 17 Uhr die Schale halbvoll war, ist sie 15 Minuten später, also um 17:15 Uhr voll.

   (ii) Um einen doppelt so großen Behälter zu füllen, braucht es nochmal 15 Minuten, also ist die doppelt so große Schale schon bereits um 17:30 Uhr voll (die Bakterien hören nicht zwischendrin auf sich zu vermehren, da um 17:10 Uhr die Schale noch nicht voll war).

b) Zu $B(t) = 0$ haben wir 12 000 Bakterien, also ist $12000 = B(0) = B_0 \underbrace{a^0}_{=1} = B_0$. Wegen $B(15) = 2B(0)$ erhalten wir $a^{15} = 2$ und damit $a = 2^{1/15} \approx 1,0473$.

c) Nach der Formel in b) erhalten wir $B(5) = 12000 \cdot \sqrt[15]{2}^5 = 12000 \cdot \sqrt[3]{2} \approx 15119$. Nach 2 Stunden=8· 15 Minuten erhalten wir entsprechend $12000 \cdot 2^8 = 3\ 072\ 000$.

d) Wir stellen die Gleichung $B(t) = 12000a^t = 1000000$ auf und erhalten durch Umstellen: $a^t = 1000/12 \Rightarrow t = \log_a(1000/12) = \frac{\log(1000/12)}{\log(2^{1/15})} \approx 95,7$ Minuten.

e) Um 17 Uhr war die Schale halb voll, also fünfmal so voll wie ein Zehntel. Setzen wir also $t_1 = 17$ Uhr und t_0, wenn die Schale zu einem Zehntel voll ist, erhalten wir:

$$5 = B(t_1)/B(t_0) = \frac{B_0 a^{t_1}}{B_0 a^{t_0}} = a^{t_1 - t_0}$$

Damit hat Ferdinand noch $t_1 - t_0 = \log_a(5) \approx 34,8$ Minuten Zeit einen Kaffe trinken zu gehen.

[1] Als Mathematiker kann er sehr schnell und sehr genau zählen!

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 19. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+3P+2P+3P)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x+1}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \exp(\exp(\exp(-x^2)))$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\exp\left(\log(2)+\frac{\log(3)+4}{x}\right)\cdot\cos\left(\pi\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)\right)$

Lösung 3.

Bis auf b) können wir überall direkt die Grenzwertsätze benutzen und erhalten:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+2/x+1/x^2}{x+2/x+1/x^2}$$

Wegen der Grenzwertsätze erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} 3+2/x+1/x^2 = \lim_{x\to\infty} 3 + 2\lim_{x\to\infty} 1/x + \lim_{x\to\infty} 1/x^2 = 3$$
$$\text{und } \lim_{x\to\infty} 2x+2/x+1/x^2 = \infty$$

und damit $\lim_{x\to\infty} \frac{3+2/x+1/x^2}{x+2/x+1/x^2} = 0$.

b) Sei $(x_n)_n$ eine Folge, die bestimmt gegen ∞ konvergiert. Die Folge $f(x_n) = \frac{\sin(x_n)cos(x_n)}{x_n}$ können wir (wegen $x_n > 0$ für großes n) abschätzen durch $\frac{-1}{x_n} \le f(x_n) \le \frac{1}{x_n}$. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ gilt, ist nach dem Sandwichlemma $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Da das für jede Folge $x_n \to \infty$ gilt, haben wir insbesondere $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

c) Iterativ eingesetzt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty \\
\Rightarrow &\lim_{x\to\infty} \exp(-x^2) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-x) = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{x\to\infty} \exp(\exp(-x^2)) = \lim_{x\to 0} \exp(x) = 1 \\
\Rightarrow &\lim_{x\to\infty} \exp(\exp(\exp(-x^2))) = \lim_{x\to 1} \exp(x) = e
\end{aligned}$$

d) Wir sehen zuerst

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(3)+4}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

Setzen wir dies in unsere Grenzwertsätze ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\exp\left(\log(2)+\frac{\log(3)+4}{x}\right)\cdot\cos\left(\pi\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \exp\left(\log(2)+x\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} \cos\left(\pi x\right)\right) \\
&= \exp(\log(2))\cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 19. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (3P+3P+2P+2P)

Wir betrachten die folgenden Funktionen von $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils, ob die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

Hinweis: *Außerhalb von ± 1 können wir die Brüche durch Kürzen vereinfachen, sodass entweder im Zähler oder im Nenner (und nicht bei beiden) der Grenzwert Null ist.*

Lösung 4.

Bevor wir anfangen, sehen wir mit der zweiten Binomischen Formel $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$, insbesondere sind alle betrachteten Funktionen nicht auf 1 definiert. Sei stets $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ die gegen 1 konvergiert.

a) Wir sehen zuerst $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + 2x_n + 1 = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n+1)^2 = 4$ und $x_n^2 - 2x_n + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 - 2x_n + 1 = 1^2 - 2 + 1 = 0$. Da alle Folgenglieder positiv sind, erhalten wir damit

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \infty$$

b) Die Funktion konvergiert nicht, denn für $x < 1$ ist $x^2 - 1 < 0$ und für $x > 1$ ist $x^2 - 1 > 0$. Das heißt je nachdem aus welcher Richtung wir kommen, erhalten wir ein unterschiedliches Vorzeichen. Als explizites Beispiel haben wir:
Für $x_n = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1}{(1+\frac{1}{n}-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} 2n + 1 = \infty$$

Aber für $y_n = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^2 - 1}{(1-\frac{1}{n}-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{2}{n} + (\frac{1}{n})^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} -2n + 1 = -\infty$$

Also hat die Funktion bei $x = 1$ keinen Grenzwert.

Alternativ: Nach der dritten binomischen Formel ist $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$. Wegen $x_n \neq \pm 1$ erhalten wir eingesetzt

$$\frac{x_n^2 - 1}{(x_n - 1)^2} = \frac{(x_n-1)(x_n+1)}{(x_n-1)^2} = \frac{x_n+1}{x_n-1}$$

Da aber $\frac{1}{x_n - 1}$ bei $x = 1$ nicht konvergiert (wie oben), konvergiert die Funktion nicht.

---

c) Wie in der Alternative von b) benutzen wir $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x+1}$. Da $\lim\limits_{x\to 1} x-1 = 0$ und $\lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2$ konvergiert nach den Grenzwertsätzen auch $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ bei $x = 1$ gegen $\dfrac{\lim_{x\to 1} x-1}{\lim_{x\to 1} x+1} = 0$.

d) Wir testen zuerst, ob $x^2 + x - 2$ eine Nullstelle bei $x = 1$ hat. (Wenn nicht, wären wir schon bereits fertig). Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir die Nullstellen:

$$\begin{aligned} & x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 \overset{!}{=} 0 \\ \iff & (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \\ \implies & x + \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \\ \implies & x = -2, 1 \end{aligned}$$

Also ist $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Wie in c) haben wir dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} x_n + 2 = 3$$