**Beispiel 7.6**

a) Nach Satz 7.5 (iii) hat die Funktion $f_2(x) = x^2 = x \cdot x$ die Ableitung $f_2'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1$ wobei wir nach Bsp. 7.3 wissen, dass die Identitätsfunktion $f_1(x) = x$ die Ableitung $f_1'(x) = 1$ hat.

Allgemeiner hat für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x = f_{n-1}(x) \cdot f_1(x)$ die Ableitung:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= f_{n-1}'(x) \cdot f_1(x) + f_{n-1}(x) \cdot f_1'(x) \\
&= x \cdot f_{n-1}'(x) + x^{n-1} \\
&= x \cdot (f_{n-2} \cdot f_1)'(x) + x^{n-1} \\
&= x \cdot (f_{n-2}'(x) \cdot x + f_{n-2}(x)) + x^{n-1} \\
&= x^2 \cdot f_{n-2}'(x) + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\
&= x^2 \cdot f_{n-2}'(x) + 2x^{n-1} \\
&= x^2 \cdot (f_{n-3}'(x) f_1(x) + f_{n-3}(x) f_1'(x)) + 2x^{n-1} \\
&\qquad \vdots \\
&= x^{n-1} \cdot f_1'(x) + (n-1)x^{n-1} \\
&= n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

b) Für eine Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ gilt nach Satz 7.5(i) und (ii) und Beispiel a) von oben:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k x^{k-1}$$

wobei wir wieder nach Bsp. 7.3. wissen, dass die konstante Funktion $g(x) = a_0 X^0 = a_0$ die Ableitung $g'(x) = 0$ hat.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x^2+3}$ können wir schreiben als $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ mit $g(x) = 3x - 1$ und $h(x) = 2x^2 + 3$. Nach Satz 7.5 (iv) ist $f$ differenzierbar (da $h(x) = 2x^2 + 3$ keine Nullstelle hat) und wir erhalten

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} \\
&= \frac{3 \cdot (2x^2+3) - (3x-1) \cdot (2 \cdot 2x)}{(2x^2+3)^2} \\
&= \frac{6x^2 + 9 - 12x^2 + 4x}{(2x^2+3)^2} = \frac{-6x^2 + 4x + 9}{(2x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(3x^2)$ können wir schreiben als $f(x) = g(h(x))$ mit $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = 3x^2$. Nach der Kettenregeln gilt dann

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 6x \cdot \cos(3x^2).$$

e) Da $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in D$ ist nach Satz 7.5 c) auch log differenzierbar mit

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$