6.3 (Ergänzung zu) Stetigkeit

Satz 6.22 (Zwischenwertsatz)
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und für $y \in \mathbb{R}$ gilt $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$. Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$, d.h. f nimmt alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ auf dem Intervall $[a, b]$ an.

Beispiel 6.23 a) Für die Polynomfunktion $f(x) = x^5 + 4x^4 + x - 8$ gilt $f(-10) = -10^5 + 4 \cdot 10^4 - 10 - 8 < 0$ und $f(10) = 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 10 - 8 > 0$. Also hat f im Intervall $[-10, 10]$ eine Nullstelle.

Das geht genauso gut für alle Polynome $f(x)$ mit ungeradem Grad, d.h. der höchste Exponent ist ungerade. Denn für solch ein Polynom gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \mp\infty = -\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Für groß genuges K ist also $f(-K) < 0 < f(K)$ oder $f(K) < 0 < f(K)$ und nach dem Zwischenwertsatz haben wir eine Nullstelle.

b) Aus $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ erhalten wir aus dem Zwischenwertsatz, dass für jedes $y \in (0, \infty)$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$ existiert, also ist $(0, \infty) \subseteq \mathrm{Bild}(\exp)$. Da auch $\exp(x) > 0$ gilt, ist damit $\mathrm{Bild}(\exp) = (0, \infty)$ gezeigt.

c) (nicht prüfungsrelevante Anwendung:) Wir können mit dem Zwischenwertsatz sogar Nullstellen approximieren. Sei $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a_0) < 0 < f(b_0)$. Wir halbieren das Intervall $[a_0, b_0]$ mit $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und gehen wie folgt vor:

- Ist $f(c_0) = 0$ haben wir eine Nullstelle gefunden.
- Ist $f(c_0) < 0 < f(b_0)$, dann hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[c_0, b_0]$. Wir setzen dann $a_1 := c_0$ und $b_1 := b_0$.
- Ist $f(c_0) > 0 < f(a_0)$, dann hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[a_0, c_0]$. Wir setzen dann $a_1 := a_0$ und $b_1 := c_0$.

Wir wiederholen dann obiges mit $c_i := \frac{a_i+b_i}{2}$ und erhalten so entweder eine Nullstelle c_i oder eine monoton steigende Folge $a_n < b_0$ und eine monoton fallende Folge $b_n > a_0$ mit $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$. Nach dem Monotoniekriterium konvergieren a_n und b_n und wegen $\frac{b_0-a_0}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ haben sie den gleichen Grenzwert x_0. Wir wollen nun einsehen, dass x_0 tatsächlich eine Nullstelle von f ist:
Nach Konstruktion haben wir immer mindestens eine Nullstelle $a_n \leq y_n \leq b_n$ von f, wir erhalten also nach dem Sandwichlemma $x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Da f stetig ist, gilt also

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = f(x_0).$$

Definition 6.24
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen dann f ist

a) *monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) \geq f(y)$ gilt.

b) *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) > f(y)$ gilt.

c) *monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) \leq f(y)$ gilt.

d) *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x > y$ bereits $f(x) < f(y)$ gilt.

Satz 6.25
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion, dann ist $\text{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$ und die Funktion

$$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$$

hat eine stetige Umkehrabbildung $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.
Entsprechend gilt die Aussage auch für stetige, streng monoton fallende Funktionen mit $\text{Bild}(f) = [f(b), f(a)]$ und für offene bzw. halboffene Intervalle, wobei wir $f(a)$ durch den Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ ersetzen. (Wegen dem Minorantenkriterium und der Monotonie existieren diese Grenzwerte immer)

Beispiel 6.26
Die Exponentialfunktion ist stetig und streng monoton wachsend auf dem offenen Intervall $(-\infty, \infty)$. Wegen $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$ erhalten wir eine **stetige** Umkehrabbildung $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.27
Wir benötigen in Satz 6.25, dass D ein Intervall ist. Ein Gegenbeispiel findet sich auf dem aktuellen Übungsblatt 11.