Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 9. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+3P+4P)

Zeigen Sie mit Hilfe des Sandwich-Lemmas, dass die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert:

a) $a_n := \dfrac{(n!)\cdot(n!)}{(2n)!}$ b) $b_n := \dfrac{\sin(n)-2n}{n+\cos(n)}$ c) $c_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Hinweis: *Multiplizieren Sie* c_n *mit* $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Lösung 1.

a) Da alles positiv ist, haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $0 \leq a_n$. Weiterhin erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n\cdot (n+1)\cdot \cdots \cdot 2n} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n}{(n+1)\cdot \cdots \cdot 2n} \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{<1}\cdot \cdots \cdot \underbrace{\frac{n}{2n}}_{<1} \\ &< \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Da aber $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} 0$ ist, erhalten wir nach dem Sandwich-Lemma wegen $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ bereits $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

b) Wir schätzen jeweils $-1 \leq \sin(x), \cos(x) \leq 1$ ab und erhalten damit für $n \geq 2$:

$$\frac{-1-2n}{n+1} \leq b_n = \frac{\sin(n)-2n}{n+\cos(n)} \leq \frac{1-2n}{n-1}$$

Für die Grenzwerte errechnen wir wie auf dem letzten Blatt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1-2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n}-2}{1+\frac{1}{n}} = -2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{1-\frac{1}{n}} = -2$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

c) Wir folgen dem Hinweis und erweitern mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ ist auch $0 < c_n$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Aufgabe 2. (3P+4P+3P)

Bestimmen Sie die Reihenwerte der folgenden konvergierenden Reihen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - (\frac{3}{4})^k \right)$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k(k+3)} \right)$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^k - 2^{-k}}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}} \right)$

Hinweis: *Benutzen Sie für b) die Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+3}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung 2.

Wir benutzen für a) und c) die Reihenwerte für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ und die Rechenregeln für die Reihenwerte von konvergierenden Reihen. Damit ergibt sich:

a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - (\frac{3}{4})^k \right) &= 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^k} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{1} = 0 \end{aligned}$$

b) Auflösen der Gleichung $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+3}$ ergibt:

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3) + bk}{k(k+3)} = \frac{(a+b)k + 3a}{k(k+3)}$$

Vergleichen der Koeffizienten von k liefert $b = -a$ und $3a = 3$, also $a = 1$. Eingesetzt erhalten wir also für die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{k(k+3)} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=4}^{n+3} \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+3} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k-2^{-k}}{3^k}-\frac{1}{3^{k+1}}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k}{3^k}-\frac{1}{2^k3^k}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\\ &= \frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\ &= 3-\frac{6}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{30-12-5}{10}=1,3\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (2P+2P+2P+4P)

Geben Sie jeweils (wie immer mit einer Begründung) an, ob die folgenden Reihen bedingt konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k})^3$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right)$

Hinweis: *Für die d) kann es sinnvoll sein, aufeinanderfolgende Summanden passend zusammenzufassen. Sie dürfen die Periodizität* $\cos(2\pi+x)=\cos(x)$ *benutzen.*

Lösung 3.

a) Wir erhalten die Minorante $\frac{k+2}{k(k+1)}>\frac{k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}>0$. Nach Vorlesung divergiert aber die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ und damit nach dem Minorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k(k+1)}$.

b) Wir haben $0\leq(\frac{1}{k})^3=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k^2}$ für $k\geq 1$. Nach der Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ und damit konvergiert nach dem Majorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k})^3$ absolut.

c) Wir wenden das Quotientenkriterium an und erhalten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\left(\frac{k+2}{(k+1)!}\right)}{\left(\frac{k+1}{k!}\right)}=\frac{(k+2)k!}{(k+1)(k+1)!}=\frac{k+2}{(k+1)^2}\xrightarrow{k\to\infty}0$$

Insbesondere ist damit ab einem $N\in\mathbb{N}$ für alle $k>N$ die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$ erfüllt und damit konvertigert $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}$ absolut.

d) Wir berechnen zuerst die Werte von $\cos(k\pi/3)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi/3) &= -0,5 & \cos(\pi) &= -1 & \cos(4\pi/3) &= -0,5\\
\cos(5\pi/3) &= 0,5 & \cos(2\pi) &= 1 & \cos(7\pi/3) &= 0,5\\
\cos(8\pi/3) = \cos(2\pi + 2\pi/3) &= -0.5\ldots
\end{aligned}$$

Das heißt wir erhalten immer drei aufeinanderfolgende negative Zahlen und drei aufeinanderfolgende positive Zahlen. Fassen wir immer drei aufeinanderfolgende Summen zusammen, erhalten wir also die Folge

$$a_n := (-1)^n \left(\frac{1}{3(n-1)+1} 0,5 + \frac{1}{3(n-1)+2} + \frac{1}{3(n-1)+2} 0,5 \right)$$

Da für wachsendes n die Brüche alle kleiner werden und gegen 0 gehen, ist insbesondere $|a_n|$ eine streng monoton fallende Nullfolge. Wir erhalten also nach dem Leibniz-Kriterium, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right)$ konvergiert.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right)$ konvergiert aber nicht absolut, denn

$$\left| \frac{1}{k} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right) \right| \geq \frac{1}{k} \cdot 0,5$$

divergiert nach dem Minorantenkriterium (mit dem Minor $\frac{1}{2k}$).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (10P)

Beweisen Sie Bemerkung 5.23 a), d.h.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass die Folge $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gegen $q \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie dass dann folgende Aussagen gelten:

a) Ist $q < 1$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Ist $q > 1$, dann divergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Hinweis: *Zeigen Sie zuerst, dass wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = q < 1$ *ist, dann existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, sodass für alle* $n \geq N$ *die Ungleichung* $c_n < \tilde{q}$ *für ein* $\tilde{q} < 1$ *gilt.*

Lösung 4.

a) Wir zeigen zuerst den Hinweis: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge die gegen $q < 1$ konvergiert. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$, insbesondere ist damit $\tilde{q} := q + \varepsilon < 1$. Da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen q konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - q| < \varepsilon \Rightarrow c_n < \tilde{q}$.

   Sei nun (a_n) wie in der Aufgabe und $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$. Nach obigem gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ wir bereits $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q + \varepsilon < 1$ haben. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Der Beweis funktioniert im Wesentlichen wie in a): Sei $q > 1$, dann setzen wir diesmal $\tilde{q} := q - \varepsilon > 1$ mit $\varepsilon = \frac{q-1}{2} > 0$. Wegen der Konvergenz von $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ bereits $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q - \varepsilon = \tilde{q} > 1$ gilt. Das Quotientenkriterium liefert wieder, dass dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.