Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+3P+4P)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 \cdot \exp(x) - 5\sin(x).$$

Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $[0,2]$ den Wert π annimmt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [0,2]$ mit $f(x_0) = \pi$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 7x^4 - 3x^3 + 5x - 4.$$

Zeigen Sie, dass g mindestens zwei Nullstellen hat.

c) Sei $h : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass h einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x \in [0,1]$ mit $h(x) = x$.[1]

Aufgabe 2. (1P+3P+2P)

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1) \cup [2,3) \to [0,2), \quad x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ x-1, & \text{falls } x \in [2,3) \end{cases}$$

a) Begründen Sie, dass f überall stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f invertierbar ist, indem Sie die Umkehrfunktion f^{-1} angeben und zeigen, dass es tatsächlich die Umkehrfunktion ist.

c) Ist f^{-1} überall stetig?

[1] Wenn wir hier offene Intervalle benutzen gilt die Aussaqe nicht, z.B. $\tilde{h} : (0,1) \to (0,1), x \mapsto x/2$ hat keinen Fixpunkt in $(0,1)$, denn der einzige Fixpunkt wäre $x_0 = 0 \notin (0,1)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+4P+2P)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für $x \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass f auch an der Stelle 0 differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle 0 nicht stetig ist.

Aufgabe 4. (1P+3P+2P+3P)

Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion:

$$f_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^a = \exp(a \log(x)).$$

a) Begründen Sie, dass f_a für alle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f_a diffenerentierbar ist und zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln

$$f_a'(x) = a \cdot x^{a-1}.$$

c) Zeigen Sie, dass f_a für $a \neq 0$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f_a^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$ ist.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Formel für die Ableitung der Inversen $(f_a^{-1})'(x)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

Aufgabe 5. (2P+2P+3P)

Auf dem offenen Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist die Tangensfunktion definiert über

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

a) Zeigen Sie, dass tan differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $\tan'(x)$.

b) Zeigen Sie, dass die Tangensfunktion auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ invertierbar ist. Man nennt die Umkehrfunktion Arkustangens und schreibt dafür $\arctan := \tan^{-1}$.
Hinweis: *Sie dürfen hierzu folgenden Satz benutzen:*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f bereits streng monoton wachsend.

c) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

mit Hilfe der Ableitungsregeln.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 26. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.