Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösungen für das 8. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (4P+6P)

Berechnen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und Eigenräume der beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 2+i & -i \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 1.

Wir berechnen wie über $\mathbb{R}$ zuerst das charakteristische Polynom, damit die Eigenwerte und schließlich die Eigenräume.

Für die Matrix A erhalten wir:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(X \cdot I_2 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} X-i & -2+i \\ -2-i & X+i \end{pmatrix}\right) \\ &= (X-i)(X+i) - (-2+i)(-2-i) = X^2 - i^2 - 4 + i^2 = X^2 - 4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\qquad \lambda_{1,2} = \pm 2$

damit erhalten wir die zwei Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(A,2) : \begin{pmatrix} 2-i & -2+i \\ -2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle -1} \\ {\scriptstyle +} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2-i & -2+i \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \mid :(-4)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2-i & -2+i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle +} \\ {\scriptstyle -(2-i)} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \mathrm{Eig}(A,2) = \{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathrm{Eig}(A,2) : \begin{pmatrix} -2-i & -2+i \\ -2-i & -2+i \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle -1} \\ {\scriptstyle +} \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2-i & -2+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \cdot \left(\tfrac{1}{-2-i} = \tfrac{-2+i}{4+1}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-2+i)(-2+i)}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4-1-4i}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \mathrm{Eig}(A,-2) = \{\begin{pmatrix} \frac{-3+4i}{5}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Entsprechend für die Matrix B:

$$\begin{aligned}\chi_B(X) = \det(X\cdot I_3 - B) = \det(&\begin{pmatrix} X-1 & -1 & 3 \\ -1 & X+1 & 7 \\ 0 & -1 & X-2 \end{pmatrix})\\
&= (X-1)(X+1)(X-2) + 0 + 3 - 0 + 7(X-1) - (X-2)\\
&= (X^2-1)(X-2) + 3 + 7X - 7 - X + 2 = X^3 - 2X^2 - X + 2 + 3 + 6X - 7 + 2\\
&= X^3 - 2X^2 + 5X = X(X^2 - 2X + 5) \overset{NR}{=} X(X-(1+2i))(X-(1-2i))\end{aligned}$$

NR: $X^2 - 2X + 5 = (X-1)^2 - 1 + 5 \overset{!}{=} 0 \iff X - 1 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\iff X = 1 \pm 2i$

Also haben wir die Eigenwerte $0, 1 \pm 2i$. Für die Eigenräume rechnen wir wie immer die homogene LGS für $\lambda I_3 - B$ aus:

$$\mathrm{Eig}(B,0): \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ + \\ \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ +\\ +2 \quad +2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \mathrm{Eig}(B,0) = \{\begin{pmatrix} 5t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathrm{Eig}(B,1+2i): \begin{pmatrix} 1+2i-1 & -1 & 3 \\ -1 & 1+2i+1 & 7 \\ 0 & -1 & 1+2i-2 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 2i & -1 & 3 \\ -1 & 2+2i & 7 \\ 0 & -1 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ 2i \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 4i-5 & 14i+3 \\ -1 & 2+2i & 7 \\ 0 & -1 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{matrix} + \quad + \\ \\ 5-4i \quad 2+2i \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 14i+3-(5-4i)+2(5i+4) \\ -1 & 0 & 7-(2+2i)+2(2i-4) \\ 0 & -1 & -1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+2i \\ 0 & -1 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ |\cdot(-1) \\ \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathrm{Eig}(B,1+2i) = \{\begin{pmatrix} (1+2i)t \\ (-1+2i)t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

Hier kann man auch schon direkt

$$\mathrm{Eig}(B,1-2i) = \mathrm{Eig}(B,\overline{1+2i}) = \overline{\mathrm{Eig}(B,1+2i)} = \{\begin{pmatrix} (1-2i)t \\ (-1-2i)t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

ablesen, oder man rechnet nochmal:

$$\operatorname{Eig}(B, 1-2i): \begin{pmatrix} 1-2i-1 & -1 & 3 \\ -1 & 1-2i+1 & 7 \\ 0 & -1 & 1-2i-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -1 & 3 \\ -1 & 2-2i & 7 \\ 0 & -1 & -1-2i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -5-4i & 3-14i \\ -1 & 2-2i & 7 \\ 0 & -1 & -1-2i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3-14i-3+14i \\ -1 & 0 & 7-6-2i \\ 0 & -1 & -1-2i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-2i \\ 0 & -1 & -1-2i \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \operatorname{Eig}(B, 1+2i) = \left\{ \begin{pmatrix} (1-2i)t \\ (-1-2i)t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\}$$

Aufgabe 2. (3P+3P+2P+4P=12P)

Untersuchen Sie, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $a_n := q^n$ konvergiert bzw. bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

a) Betrachten Sie die drei Folgen für $q = -1, 0, 1$.

b) Für $q > 1$ schreiben Sie $q = 1 + r$ für ein $r = q - 1 > 0$. Sie dürfen hier für $r > 0$ die Ungleichung $(1+r)^n \geq 1 + rn$ benutzen.[1]

c) Betrachten Sie für $0 < q < 1$ den Kehrwert $\frac{1}{q} > 1$.

d) Für $q < 0$ können Sie es durch Multiplikation mit einer alternierenden Folge auf einen der vorigen Fälle zurückführen.

Lösung 2.

Wir gehen wie vorgeschlagen vor:

a) Für $q = -1$ erhalten wir die alternierende und damit unbestimmt divergente Folge $(-1)^n$.
Für $q = 0$ erhalten wir die konstante Nullfolge, die insbesondere gegen 0 konvergiert.
Für $q = 1$ erhalten wir die konstante Folge $a_n = 1^k = 1$, die gegen 1 konvergiert.

b) Für $q = 1 + r > 1$ gilt $a_n = (1+r)^n \geq 1 + rn$. Sei $M \in \mathbb{R}$ eine mögliche Schranke. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $rN > M \iff N > M/r$. Für jedes $n \geq N$ gilt dann:

$$a_n = q^n = (1+r)^n \geq 1 + rn \geq 1 + rN > 1 + M > M$$

also ist a_n bestimmt divergent gegen ∞.

[1] Die Ungleichung kommt von der Binomialentwicklung $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} a^k b^{n-k}$. Hierbei bezeichnet $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die n-te Fakultät.

c) Sei $0 < q < 1$, dann ist $Q := \frac{1}{q} > 1$. Nach b) ist Q^n bestimmt divergent gegen ∞ (und wegen $Q \neq 0$ auch $Q^n \neq 0$). Nach Vorlesung ist damit $a_n = \frac{1}{Q^n}$ eine Nullfolge.

d) Für $-1 < q < 0$ ist $a_n = q^n = (-1)^n(-q)^n$. Wir wollen nun zeigen, dass auch a_n eine Nullfolge ist: Sei $\varepsilon > 0$. Nach c) ist $\tilde{a_n} := (-q)^n$ eine Nullfolge, es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(-q)^n - 0| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Es ist mit dem gleichen N also auch für alle $n > N$:

$$|a_n - 0| = |(-1)^n(-q)^n| = |(-q)^n| < \varepsilon$$

und damit auch $a_n = q^n$ eine Nullfolge.

Für $q < -1$ ist $a_n := (-1)^n(-q)^n$ nach b) unbeschränkt und damit divergent. Für ungerades n ist aber $a_n < 0$ und für gerades n ist $a_n > 0$, also ist a_n nicht bestimmt divergent.

Insgesamt erhalten wir also:

- Für $q > 1$ ist q^n bestimmt divergent.
- Für $q = 1$ ist q^n konvergent gegen 1-
- Für $-1 < q < 1$ ist q konvergent gegen 0.
- Für $q \leq -1$ ist q unbestimmt divergent.

Aufgabe 3. (je 2P=12P)

Geben Sie bei den folgenden Folgen jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder ob sie bestimmt divergent sind.

a) $a_n := \dfrac{2n^3 - 3n^2 + n - 1}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}$

b) $b_n := \dfrac{3n^3 - 2n + 1}{(n+2)^2}$

c) $c_n := \dfrac{(2n+3)^2}{(2+3n)^2}$

d) $d_n := \dfrac{2^n - 3}{3^n}$

e) $e_n := \sin(\dfrac{\pi \cdot n}{2}) \cdot n$

f) $f_n := (n-1)^2 - (n+1)^2$

Hinweis: *Sie dürfen hier aus Aufgabe 2 benutzen, dass q^n für $q = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ eine Nullfolge ist.*

Lösung 3.

Wir benutzen jedes Mal die Rechenregeln für Limiten:

a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n - 1}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n} = \frac{n^3}{n^4} \cdot \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}) \cdot 1/(4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}) \end{aligned}$$

Da alle drei Folgen hier konvergieren (und der Bruch keine Nullfolge ist), konvergiert auch a_n mit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}) \cdot 1/ \lim_{n\to\infty} (4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}) \\ &= 0 \cdot 2/4 = 0 \end{aligned}$$

b)

$$b_n = \frac{3n^3 - 2n + 1}{(n+2)^2} = \frac{3n^3 - 2n + 1}{(n^2 + 4n + 4} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \underbrace{(3 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3})/(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2})}_{\tilde{b}_n} = n \cdot \tilde{b}_n$$

Da $\tilde{b}_n$ konvergiert und damit beschränkt ist, ist b_n divergent. Wegen $\lim \tilde{b}_n = 3/1 = 3 > 0$ und $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ bestimmt divergiert, ist insbesondere auch b_n bestimmt divergent mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

c)

$$c_n = \frac{(2n+3)^2}{(2+3n)^2} = \frac{4n^2 + 12n + 9}{9n^2 + 12n + 4} = \frac{n^2}{n^2} \cdot (\frac{4 + \frac{12}{n} + \frac{0}{n^2}}{9 + \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}})$$

Wie in a) ist damit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 1 \cdot 4/9 = \frac{4}{9}$

d)

$$d_n = \frac{2^n - 3}{3^n} = (\frac{2}{3})^n - \frac{3}{3^n} = (\frac{2}{3})^n - 3 \cdot (\frac{1}{3})^n$$

Nach Aufgabe 2 sind die beiden Folgen rechts Nullfolgen, also haben wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n - 3 \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$$

e) Die Sinusfunktion ist periodisch mit $\sin(k\pi) = 0, \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$, wir haben also $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 2, 0, -4, 0, 6, 0, -8, \dots)$, d.h.

$$e_n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{, falls } n \text{ ungerade und von der Form } n = 4k+1 \\ -n & \text{, falls } n \text{ ungerade und von der Form } n = 4k-1 \end{cases}$$

Insbesondere ist e_n unbeschränkt und unbestimmt divergent, da für jedes $M > 0$ wir $e_{2n} = 0 < M$ und $e_{2n} = 0 > -M$ haben.

f) Durch Umschreiben erhalten wir $f_n = (n-1)^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = -4n$ was bestimmt divergent gegen $-\infty$ geht.

Aufgabe 4. (3P+3P)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihre Differenz.

a) Sei zusätzlich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ konvergiert, wenn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Finden Sie ein Beispiel, für das $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, aber $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 42 konvergiert.

Lösung 4.

a) „$\Rightarrow$ “: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit gleichem Grenzwert a, dann ist nach Vorlesung auch $c_n := a_n + (-1)\cdot b_n$ konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + (-1)\cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a - a = 0,$$

also ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

„$\Leftarrow$ “: Ist andererseit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann ist wegen $c_n = a_n - b_n$ bereits $b_n = a_n - c_n$. Wie zuvor haben wir dann, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n - 0 = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

b) Für $a_n := 42 + n$ und $b_n := -n$ haben wir, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ divergiert und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $-\infty$ divergiert. Aber $c_n = a_n + b_n = 42 + n - n = 42$ ist eine konstante Folge und damit konverigert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 42.

Ein Beispiel mit unbestimmt divergenten Folgen wäre

$$a_n := 42 + (-1)^n \cdot n \quad \text{ und } \quad b_n := (-1)^n \cdot (-n).$$