Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+3P+4P)

Zeigen Sie mit Hilfe des Sandwich-Lemmas, dass die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie jeweils den Grenzwert:

a) $a_n := \frac{(n!) \cdot (n!)}{(2n)!}$ b) $b_n := \frac{\sin(n) - 2n}{n + \cos(n)}$ c) $c_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Hinweis: *Multiplizieren Sie* c_n *mit* $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

Aufgabe 2. (3P+4P+3P)

Bestimmen Sie die Reihenwerte der folgenden konvergierenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - (\frac{3}{4})^k \right)$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k(k+3)} \right)$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^k - 2^{-k}}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}} \right)$

Hinweis: *Benutzen Sie für b) die Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+3}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (2P+2P+2P+4P)

Geben Sie jeweils (wie immer mit einer Begründung) an, ob die folgenden Reihen bedingt konvergieren, absolut konvergieren oder divergieren:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k})^3$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3} \right)$

Hinweis: *Für die d) kann es sinnvoll sein, aufeinanderfolgende Summanden passend zusammenzufassen. Sie dürfen die Periodizität* $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ *benutzen.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (10P)

Beweisen Sie Bemerkung 5.23 a), d.h.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, sodass die Folge $c_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gegen $q \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie dass dann folgende Aussagen gelten:

a) Ist $q < 1$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Ist $q > 1$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Hinweis: *Zeigen Sie zuerst, dass wenn* $\lim_{n\to\infty} c_n = q < 1$ *ist, dann existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, sodass für alle* $n \geq N$ *die Ungleichung* $c_n < \tilde{q}$ *für ein* $\tilde{q} < 1$ *gilt.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 12. 01. 2024 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.