Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 7. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+4P+Knobelaufgabe[1]+4P)

Wir betrachten die Hasen- und Fuchspopulation in einem Gebiet. Hierbei sei H_n die Hasenpopulation und F_n die Fuchspopulation nach n Jahren seit Beobachtungsbeginn. Wir modellieren das jährliche Wachstum mit den Formeln:

$$\begin{aligned} H_{n+1} &:= 3 \cdot H_n - 2 \cdot F_n \\ F_{n+1} &:= 2 \cdot F_n \end{aligned}$$

Das heißt, jedes Jahr verdreifachen sich die Hasen, wovon jeder Fuchs zwei Hasen frisst. Die Füchse verdoppeln jedes Jahr ihre Population, solange es genügend Hasen zum Fressen gibt.

a) Finden Sie eine Matrix A, sodass $\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Wie müsste das Hasen zu Fuchsverhältnis sein, damit sich beide Populationen jedes Jahr verdoppeln? Gibt es auch andere Hasen-Fuchs-Verhältnisse, sodass sich beide Populationen jedes Jahr um einen konstanten Faktor λ vervielfachen?
Hinweis: *Das Verhältnis findet sich in Form eines Eigenvektors. Was wäre der zugehörige Eigenwert?*

c) **(Knobelaufgabe)** Zeigen Sie, dass wenn das Verhältnis $H_0 : F_0$ kleiner ist als das in b) berechnete, dann werden irgendwann alle Hasen gefressen sein.
Bemerkung: *Es gilt sogar die Rückrichtung, dass wenn alle Hasen in unserem Modell irgendwann gefressen sind, dann war das Verhältnis von Anfang an kleiner als in b).*

d) Sei $H_0 = 90$ und $F_0 = 10$ die anfängliche Population. Bestimmen Sie eine explizite Formel für H_n in Abhängigkeit von n. Wie bewerten Sie die Modellierung des Wachstums?

Lösung 1.

a) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} H_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3H_n - 2F_n \\ 0H_n + 2F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entspricht gerade der Multiplikation mit der Matrix $A := (f(e_1)|f(e_2)) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[1] Diese geht nicht in die Wertung ein, man darf aber dafür ohne schlechtes Gewissen einen Keks essen! Wer diese Aufgabe löst, darf die Lösung auch in der Übung präsentieren.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

b) Die Eigenwerte und Eigenräume berechnen sich hier sehr leicht mittels $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = (X-3)(X-2) \Rightarrow$ EW sind 2 und 3.

$$\mathrm{Eig}(A,3): \begin{pmatrix} 3-3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Eig}(A,3) = \{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (\widehat{=} \text{ nur Hasen})$$

$$\mathrm{Eig}(A,2): \begin{pmatrix} 2-3 & 2 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathrm{Eig}(A,2) = \{\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \quad (\widehat{=} \text{ 2 Hasen pro Fuchs})$$

Wenn sich die Populationen um einen Faktor k vervielfachen, dann gilt $\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} \overset{!}{=} k \begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$. Also muss bereits k ein Eigenwert und $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ ein zugehöriger von A sein. Nach obiger Rechnung geht das also nur für $k = 3$ und $k = 2$. Für $k = 2$ wäre der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, also das Hasen-Fuchs-Verhältnis $2:1$.

c) Ist das Verhältnis $H_0 : F_0 < 2$, dann gilt $\begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_0 - M \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ für eine positive Zahl $M > 0$. Da die zwei Vektoren Eigenvektoren sind, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 2F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} - A^n \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} - 3^n \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $M > 0$ ist, existiert ein groß genuges $n \in \mathbb{N}$, sodass $2^n F_0 \leq 3^n M$ gilt:

$$2^n F_0 \leq 3^n M \iff \frac{F_0}{M} \leq \frac{3}{2}^n \iff \log_{3/2}(\frac{F_0}{M}) \leq n$$

Wir erhalten also für solch ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2F_0 - 3^n \cdot M \\ 2^n \cdot F_0 \end{pmatrix}$$

mit $H_n = 2^n 2F_0 - 3^n M \leq 0$, also sind dort bereits alle Hasen gefressen. Ist andererseits $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = 2^n F \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3^n M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $H_n \leq 0$, dann muss bereits $M < 0$ oder $F < 0$ gelten. $F < 0$ geht nicht, da wir keine negativen Füchse haben, also muss bereits $M < 0$ gelten und damit ist $\frac{H_0}{F_0} = \frac{2F+M}{F} < \frac{2F}{F} = \frac{2}{1}$.

d) Wir diagonalisieren zuerst A mit den aus b) berechneten Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix} &= A^n \cdot \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ H_0 - 2F_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n F_0 \\ 3^n \cdot H_0 - 3^n \cdot 2F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} F_0 + 3^n (H_0 - 2F_0) \\ 2^n F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \cdot 10 + 3^n \cdot 70 \\ 2^n \cdot 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Das heißt bei den anfänglichen Populationen würden wir im Jahre n etwa $H_n = 2^{n+1} \cdot 10 + 3^n \cdot 70$ Hasen erwarten. Das macht natürlich nur in den Anfangsjahren Sinn, später würde das eine drastische Überpopulation bedeuten (und wegen mangelndem Essen/Platz geht das Wachstum stark zurück). Unkontrolliert hätten wir sonst nach 51 Jahren etwa $3^{51} \simeq 2,1 \cdot 10^{24}$ Hasen. Bei einem durchschnittlichen Gewicht von $3kg$ pro Hasen entspräche das etwa der Masse der Erde. Eine humorvolle Betrachtung einer entsprechenden Menge von Kleintieren mit Maulwürfen statt mit Hasen findet sich unter https://what-if.xkcd.com/4/.

Aufgabe 2. (1P+1.5P+1P+2P+1.5P+2P=9P)

Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = 2 + 5i$. Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $z + w$

b) $z \cdot w$

c) $\overline{z} \cdot \overline{w}$

d) $\frac{z}{w}$

e) $|z \cdot w|$

f) $(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}))^{2023}$

Lösung 2.

a) $z + w = 3 - i + 2 + 5i = 5 + 4i$

b) $z \cdot w = (3 - i) \cdot (2 + 5i) = 6 + 5 + (-2 + 15)i = 11 + 13i$

c) $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w} \overset{b)}{=} 11 - 13i$

d) $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{(3-i)(2-5i)}{4+25} = \frac{6-5+(-2-15)i}{29} = \frac{1-17i}{29}$

e) $|z \cdot w| = \sqrt{11^2 + 13^2} = \sqrt{290} \simeq 17,03$

f) **1. Möglichkeit:**

$$(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)^2 = (\frac{1}{2}^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}^2) + 2\frac{\sqrt{3}}{4} i = -\frac{2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)^3 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = (-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}) + (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}) i = -1$$

$$\implies (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)^{2023} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)^{(3 \cdot 674)} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = (-1)^{674} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$$

2. Möglichkeit: Nach der Multiplikationsregel für Polarkoordinaten haben wir

$$\begin{aligned}(1 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3})\right))^{2023} &= 1^{2023} \left((\cos(\frac{2023 \cdot \pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2023\pi}{3})\right) \\ &= \cos(337 \cdot (2\pi) + \frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(337 \cdot (2\pi) + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})\end{aligned}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (2P+2P+2P+2P+3P)

Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Einträge:

z	$\arg(z)$	$\lvert z\rvert$	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$1+i$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	1	1
$1-i$				
	$\frac{\pi}{3}$	2		
			-3	2
		5	3	
	$\frac{5\pi}{6}$			$\sqrt{3}$

Hinweis: *In einer Zeile gibt es zwei Möglichkeiten diese korrekt auszufüllen. Um welche Zeile handelt es sich und was sind die beiden Möglichkeiten? Verwenden Sie zur Berechnung von Winkeln einen Taschenrechner und runden Sie auf die ersten zwei Nachkommastelle.*

Lösung 3.

Wir machen eine Zeile nach der anderen:

$$\mathrm{Im}(1-i) = -1, \quad \mathrm{Re}(1-i) = 1, \quad |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \alpha \text{ mit } \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\alpha) \text{ und } \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\alpha)$$
$$\Rightarrow \arg(z) = \pm\arccos(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}) \text{ und } \mathrm{Im}(z) < 0 \Rightarrow -\pi < \arg(z) < 0$$
$$\Rightarrow \arg(1-i) = -\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}, \quad \mathrm{Re}(z) = 1$$

$$z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z) = 2 - 3i$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \quad \arg(z) = \arccos(-\frac{3}{\sqrt{13}}) \simeq 2,55$$

$$|z|^2 = \mathrm{Im}(z)^2 + \mathrm{Re}(z)^2 \Rightarrow 25 - 9 = \mathrm{Im}(z)^2 \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \pm 4$$
$$\Rightarrow z = 3 \pm 4i \quad \arg(z) = \pm\arccos(\frac{3}{5}) \simeq 0,93$$

$$\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\arg(z)) = |z|\frac{1}{2} \Rightarrow |z| = 2\sqrt{3}$$
$$\mathrm{Re}(z) = |z|\sin(\arg(z)) = 2\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3$$
$$\Rightarrow z = -3+\sqrt{3}i$$

Insgesamt erhalten wir also die Tabelle:

z	$\arg(z)$	$\lvert z\rvert$	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$1+i$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	1	1
$1-i$	$-\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	1	-1
$1+\sqrt{3}i$	$\frac{\pi}{3}$	2	1	$\sqrt{3}$
$2-3i$	$\arccos(-\frac{3}{\sqrt{13}}) \simeq 2,55 \simeq 146,3°$	$\sqrt{13}$	-3	2
$3\pm 4i$	$\pm\arccos(\frac{3}{5}) \simeq \pm 0,93 \simeq \pm 53,13°$	5	3	± 4
$-3+\sqrt{3}i$	$\frac{5\pi}{6}$	$2\sqrt{3}$	-3	$\sqrt{3}$

Aufgabe 4. (2P+2P+2P+2P+2P)

a) Finden Sie alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms $g(X) = X^2 - 2X + 3$.

Sei ab nun das Polynom $f(X) = X^5 - 1$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f(X)$, d.h. es gilt $\zeta^5 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $|\zeta| = 1$ gilt.

c) Geben Sie eine mögliche Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \neq 1$ an.
Hinweis: *Es gilt* $\cos(2\pi) = 1$ *und* $\sin(2\pi) = 0$.

d) Zeigen Sie, dass auch ζ^2 und $\overline{\zeta}$ Nullstellen von $f(X)$ sind.

e) Zeigen Sie, dass $\overline{\zeta} = \zeta^4$ gilt.
Hinweis: *Wegen* $\zeta^5 = 1$ *können Sie die Inverse von* ζ *auf zwei verschiedene Weisen aufschreiben.*

Lösung 4.

a) Wir machen quadratische Ergänzung und erhalten

$$X^2 + 2X + 3 = (X-1)^2 - 1 + 3 \overset{!}{=} 0$$
$$\iff \quad (X-1)^2 = -2 \iff X - 1 = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\sqrt{-1} = \pm\sqrt{2}i$$
$$\iff \quad X = 1 \pm \sqrt{2}i$$

Also hat $f(X)$ die beiden komplexen Nullstellen $1 \pm \sqrt{2}i$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 15. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Wir sehen zuerst ein, dass z eine Nullstelle von $f(X) = X^5 - 1$ ist, wenn $z^5 - 1 = 0 \iff z^5 = 1$ gilt.

a) Es gilt $|\zeta|^5 = |\zeta^5| = 1$. Da die einzige reelle Zahl mit $x^5 = 1$ bereits $x = 1$ ist, muss also schon $|\zeta| = 1$ gelten.

b) Nach der Multiplikationsregel für Polarkoordinaten haben wir für $\zeta = |\zeta|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \overset{b)}{=} \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ bereits $\zeta^5 = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^5 = (\cos(5\alpha) + i\sin(5\alpha)$. Wir suchen also ein α mit $\cos(5\alpha) = 1$ und $\sin(5\alpha) = 0$. Nach dem Hinweis tut es z.B. $\alpha = 2\pi/5$ (genauso gut gehen übrigens auch alle $\alpha = \frac{2k\pi}{5}$). Damit wäre $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5}) \simeq 0,31 + 0,95i \neq 1$ eine mögliche Nullstelle.

c) Es gilt $(\zeta^2)^5 = \zeta^{10} = (\zeta^5)^2 = 1^2 = 1$ und $(\overline{\zeta})^5 = \overline{(\zeta^5)} = \overline{1} = 1$, also sind sowohl ζ^2 als auch $\overline{\zeta}$ Nullstellen von $f(X)$.

d) Wegen $\zeta \cdot \zeta^4 = \zeta^5 = 1$, ist $\zeta^{-1} = \zeta^4$. Nach Vorlesung ist aber auch $\zeta^{-1} = \frac{\overline{\zeta}}{|\zeta|^2} \overset{b)}{=} \overline{\zeta}$. Also gilt $\zeta^4 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta}$.