Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 6. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+2P+2P+2P+2P)

Geben Sie jeweils mit einer Begründung oder einem Gegenbeispiel an, ob die folgenden Abbildungen linear sind

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ b - a \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + 3 \\ b - 1 \end{pmatrix}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto |a - b|$

d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c - a \\ b - c \\ a - b \end{pmatrix}$

und geben Sie gegebenenfalls eine Matrix A_i an, sodass $f_i(v) = A_i v$ gilt.

Lösung 1.

a) f_1 ist linear, denn für alle $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(v + \lambda w) &= f(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} v_1 + \lambda w_1 \\ v_2 + \lambda w_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2(v_1 + \lambda w_1) + 3(v_2 + \lambda w_2) \\ (v_2 + \lambda w_2) - (v_1 + \lambda w_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v_1 + 3v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda w_1 + 3\lambda w_2 \\ \lambda w_2 - \lambda w_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v_1 + 3v_2 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2w_1 + 3w_2 \\ w_2 - w_1 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) + \lambda f(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = f(v) + \lambda f(w) \end{aligned}$$

Als Matrixmultiplikation erhalten wir $A_1 = (f_1(e_1) \mid f_1(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) f_2 ist nicht linear, denn es gilt $f_2(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, aber $f(0 + 0) = f(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq f(0) + f(0)$. Hier sieht man auch direkt, dass eine lineare Abbildung stehts die Null auf die Null abbildet.

c) f_3 ist auch nicht linear, denn es gilt

$$f_3(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = f_3(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \neq 1 + 1 = f_3(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + f_3(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

d) f_4 ist linear denn für $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_4(v + \lambda w) = f_4(\begin{pmatrix} v_1 + \lambda w_1 \\ v_2 + \lambda w_2 \\ v_3 + \lambda w_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (v_3 + \lambda w_3) - (v_1 + \lambda w_1) \\ (v_2 + \lambda w_2) - (v_3 + \lambda w_3) \\ (v_1 + \lambda w_1) - (v_2 + \lambda w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 - v_1 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda w_3 - \lambda w_1 \\ \lambda w_2 - \lambda w_3 \\ \lambda w_1 - \lambda w_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} v_3 - v_1 \\ v_2 - v_3 \\ v_1 - v_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_3 - w_1 \\ w_2 - w_3 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} = f_4(v) + \lambda f_4(w)$$

Als Matrizenmultiplikation wäre das gerade die Multiplikation mit der Matrix

$$A_4 = (f_4(e_1) \mid f_4(e_2) \mid f_4(e_3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (2P+4P+4P+2P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?

b) Berechnen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 3)$ zum Eigenwert 3 von A.

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und seine Nullstellen.

d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Lösung 2.

a) Es gilt $A \cdot v = \begin{pmatrix} 2+0 \\ -2+3\cdot 2+0 \\ -3-2+3+8 \\ -4-2-6+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2v$. Also ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

b) $\mathrm{Eig}(A,3)$ ist gerade die homogene Lösungsmenge von $3I_4 - A$. Wir berechnen diese nun:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3-3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3-1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wählen wir x_3 und x_4 als freie Parameter, erhalten wir also

$$\mathrm{Eig}(A,3) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2t-2s \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \}.$$

c) Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot I_4 - A) = \det(\begin{pmatrix} X-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & X-3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & X-1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & X-5 \end{pmatrix})$$

$$= (X-2)\cdot \det(\begin{pmatrix} X-3 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & -2 \\ 1 & 2 & X-5 \end{pmatrix}) = (X-2)(X-3)\cdot\det(\begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ 2 & X-5 \end{pmatrix})$$

$$= (X-2)(X-3)((X-1)(X-5)+4) = (X-2)(X-3)(X^2-6X+9) = (X-2)(X-3)^3$$

Hierbei haben wir zweimal jeweils nach der ersten Zeile der Determinante entwickelt. Also hat $\chi_A(X)$ die Nullstellen 2 und 3.

d) Die Eigenwerte von A sind gerade die Nullstellen von $\chi_A(X)$, also 2 und 3. Die algebraischen Vielfachheiten lassen sich direkt ablesen und sind $a(2) = 1$ und $a(3) = 3$. Bei den geometrischen Vielfachheiten folgt aus $1 \leq g(2) \leq a(2) = 1$ direkt $g(2) = 1$. In b) haben wir den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,3)$ berechnet und lesen dort $g(3) = 2$ ab (wir haben die beiden Parameter s und t).

Aufgabe 3. (3P+4P+4P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von A und B.

b) Finden Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch ausmultiplizieren.

Lösung 3.

a) Wir berechnen zuerst jeweils das charakteristische Polynom mit Nullstellen:

$$\chi_A(X) = \det(\begin{pmatrix} X-1 & -3 \\ -3 & X-1 \end{pmatrix}) = (X-1)^2 + 9 \Rightarrow \text{ NST sind } 1 \pm 3 = -2, 4$$

Für die Eigenräume berechnen wir wieder die homogenen Lösungsmengen von $\lambda I_2 - A$:

$$\begin{pmatrix} -2-1 & -3 \\ -3 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{-1} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid : (-3) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, -2) = \{\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -3 \\ -3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \urcorner^{+1} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid : 3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid : 3$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, 4) = \{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Entsprechend erhalten wir für B:

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \det(X \cdot I_3 - B) = \det(\begin{pmatrix} X-2 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X+2 \end{pmatrix}) \\ &= (X-2)(X-1)(X+2) - 2 + 0 + 2(X-1) - 0 - 0 = (X^2-4)(X-1) + 2(X-1) - 2 \\ &= X^3 - X^2 - 4X + 4 + 2X - 2 - 2 = X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2) \overset{NR}{=} X(X-2)(X+1) \end{aligned}$$

Die Nebenrechnung ist hier:

$$\begin{aligned} NR : (X^2 - X - 2) = 0 &\iff (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0 \\ &\iff (X - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \qquad \Rightarrow (X - \frac{1}{2}) = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow X_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = -1, 2 \end{aligned}$$

Also hat B die Eigenwerte $-1, 0$ und 2. Wie zuvor berechnen wir die Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(B,0): \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid : (-2) \\ \mid : (-1) \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B,0) = \{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathrm{Eig}(B,-1): \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B,0) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathrm{Eig}(B,2): \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid : (-2) \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B,2) = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

b) Wir nehmen zwei verschiedene Eigenvektoren aus Teil a) für Vektoren von S, d.h. $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Nach der Formel für Inverse für 2×2-Matrizen haben wir

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ausrechnen liefert:

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (2P+4P+2P)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, S eine invertierbare Matrix und $\tilde{A} := SAS^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(\tilde{A})$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $\tilde{A}$ bereits das charakteristische Polynom von A ist, d.h. es gilt $\chi_A(X) = \chi_{\tilde{A}}(X)$.
Hinweis: *Benutzen Sie, dass $X \cdot I_n$ mit allen Matrizen kommutiert, d.h. es gilt $(X \cdot I_n)S = S(X \cdot I_n)$.*

c) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A. Zeigen Sie, dass dann $Sv \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von $\tilde{A}$ ist.

Lösung 4.

Die Operation $A \mapsto SAS^{-1}$ nennt man auch mit S konjugieren. Das entspricht einem Wechsel der Koordinaten (man beachte, dass die neuen Achsen dabei nicht unbedingt wieder orthogonal zueinander stehen).

a) Da die Determinante multiplikativ ist, gilt $\det(\tilde{A}) = \det(SAS^{-1}) = \det(S)\det(A)\det(S^{-1})$. Da weiterhin $\det(S)^{-1} = \det(S^{-1})$ gilt, haben wir damit bereits $\det(S)\det(A)\det(S^{-1}) = \det(A)$ und sind fertig.

b) Wir benutzen die Definition des charakteristischen Polynoms und erhalten:

$$\begin{aligned}\chi_{\tilde{A}}(X) &= \det(X \cdot I_n - \tilde{A}) = \det((X \cdot I_n)SS^{-1} - SAS^{-1})) = \det(S(X \cdot I_n)S^{-1} - SAS^{-1}) \\ &= \det(S \cdot (\ (X \cdot I_n)S^{-1} - AS^{-1})\ ) = \det(S \cdot (X \cdot I_n - A) \cdot S^{-1}) \\ &\overset{a)}{=} \det(X \cdot I_n - A) = \chi_A(X)\end{aligned}$$

D.h. konjugieren mit einer Matrix S ändert das charakteristische Polynom und damit die Eigenwerte von A nicht.

c) Sei v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, dann gilt:

$$\tilde{A}Sv = SAS^{-1}Sv = SAv = S\lambda v = \lambda Sv$$

Also ist Sv ein Eigenvektor von $\tilde{A}$ zum Eigenwert λ.

Was wir hier nach Teil c) eigentlich sogar haben ist, dass S den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ auf den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\tilde{A}, \lambda)$ abbildet. Da S invertierbar ist und wegen $A = S^{-1}AS$ erhalten wir auch eine Abbildung $S^{-1} : \mathrm{Eig}(\tilde{A}, \lambda) \to \mathrm{Eig}(A, \lambda), \quad v \mapsto S^{-1}v$, insbesondere sind die beiden Eigenräume gleich groß und damit die geometrischen Vielfachheiten von A und $\tilde{A}$ gleich.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.