Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 1. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (6P+4P)

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei beliebige natürliche Zahlen. Welche der folgenden Implikationen stimmen:

   (i) „m ist eine gerade Zahl“ $\Longrightarrow$ „$m \cdot n$ ist eine gerade Zahl.“
   (ii) „$m \cdot n$ ist eine gerade Zahl“ $\Longrightarrow$ „m ist eine gerade Zahl.“
   (iii) „$m \cdot n$ ist eine ungerade Zahl“ $\Longrightarrow$ „m ist eine ungerade Zahl.“
   (iv) „$m > n$“ $\Longleftrightarrow$ „$m + 1 > n + 1$“
   (v) „Es gilt die Gleichung $1 = 2$“ $\Longrightarrow$ „$m = n$“
   (vi) „Es gilt $m = n$“ $\Longrightarrow$ „$1 + 1 = 2$.“

b) Geben Sie jeweils ein Beispiel mit zwei Aussagen A und B an, für die Folgendes zutrifft:

   (i) „$A \Longleftrightarrow$ nicht B“
   (ii) „$A \Rightarrow B$“ und „nicht $A \Rightarrow B$“

Lösung 1.

a) (i) Die Aussage stimmt: Wenn m gerade ist, dann wird m durch 2 geteilt und damit auch $m \cdot n$.
   (ii) Die Aussage ist falsch: Z.B. für $m = 3$ und $n = 2$ ist $n \cdot m = 6$ gerade, aber m ungerade. Also können wir aus $m \cdot n$ gerade nicht m gerade folgern.
   (iii) Die Aussage stimmt, denn es ist gerade die Umkehrung der a) („$A \Rightarrow B$“ ist das gleiche wie „nicht $B \Rightarrow$ nicht A“.)
   Ausführlicher: Ist $m \cdot n$ ungerade, dann müssen bereits beide ungerade sein, denn sonst wäre nach a) $m \cdot n$ gerade.
   (iv) Es gilt „$\Rightarrow$“ und „$\Leftarrow$“, also auch „ $\Longleftrightarrow$ “.
   (v) Die Aussage stimmt (auch wenn A falsch ist), denn aus einer falschen Aussage können wir alles folgern („Wenn Schweine fliegen können, dann...“).
   (vi) Die Aussage stimmt, denn $1 + 1 = 2$ gilt immer. Wir können aber daraus nichts auf die Aussage „$m = n$“ folgern.

b) (i) Das heißt, dass genau eine der beiden Aussagen, also entweder A oder B, stimmt. Ein Beispiel wäre für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$: „n ist gerade $\Longleftrightarrow$ n ist nicht ungerade.“
   (ii) Das heißt, dass unabhängig von A die Aussage B stimmt. Ein Beispiel wäre (vi) von Teil a).

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 03. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (3P+3P+3P+3P)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS:

a) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

Lösung 2.

Wir benutzen jeweils das Substitutionsverfahren:

a)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \iff x_1 = 2 - 2x_2 + x_3$$

Einsetzen in die 2. und 3. Gleichung ergibt:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 - 2x_2 + x_3 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2 - 2x_2 + x_3 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ccccc} -x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \iff x_2 = 2x_3 - 1$$

Wiederum x_2 in die 3. Gleichung eingesetzt ergibt:

$$-4(2x_3 - 1) + 2x_3 = 2 \iff -8x_3 + 4 + 2x_3 = 2 \iff -6x_3 = -2 \iff x_3 = \frac{1}{3}$$

Rückeinsetzen liefert dann:

$$x_2 = 2x_3 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2(-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

Ein kurzer Test ergibt auch, dass wir uns nicht verrechnet haben:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & + & 2(-\frac{1}{3}) & - & \frac{1}{3} & = & 2 \\ 3 & + & (-\frac{1}{3}) & + & \frac{1}{3} & = & 3 \\ 3 & - & 2(-\frac{1}{3}) & + & \frac{1}{3} & = & 4 \end{array} \checkmark$$

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \}$.

b) Entsprechend wie in a) lösen wir die anderen LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array} \iff x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\overset{x_1 \text{ eins.}}{\Longrightarrow} \begin{array}{lcll} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 & & & \\ -(2 + 2x_2 - 3x_3) + x_2 - x_3 & = & 3 & \iff -x_2 + 2x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 2x_3 - 5 \\ 2 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_2 + 5x_3 & = & 4 & \iff -x_2 + 2x_3 = 2 \end{array}$$

$$\overset{3 \text{ Gl. eins.}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 5 \\ -(2x_3 - 5) + 2x_3 = 2 \quad \iff 5 = 2 \end{array}$$

Also hat das LGS keine Lösung und wir erhalten $\mathbb{L} = \emptyset$.

c) Die ersten Schritte sind wie in b) (nur b_3 ist unterschiedlich). Wir erhalten also nach Umformen und Einsetzen:

$$\begin{array}{l} x_1 = 2 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 5 \\ -(2x_3 - 5) + 2x_3 = 5 \quad \iff 5 = 5 \end{array}$$

Wir können also $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Rückwärts einsetzen ergibt dann:

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_3 - 5 \\ x_1 &= 2 + 2x_2 - 3x_3 = 2 + 2(2x_3 - 5) - 3x_3 = -8 + x_3 \end{aligned}$$

und damit die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_3 - 8 \\ 2x_3 - 5 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R} \} = \{ \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R} \}.$$

d) Wie zuvor erhalten wir durch Umformen $x_1 = 2 + 2x_2$ eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt:

$$x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow 2 + 2x_2 + x_2 = 5 \iff x_2 = 1$$

Wieder in die 1. Gleichung eingesetzt erhalten wir $x_1 = 2 + 2x_2 = 4$.
Wir müssen jetzt noch nachprüfen, ob x_1 und x_2 auch die dritte Gleichung erfüllen:

$$x_1 - x_2 = 4 - 1 = 3 \quad \checkmark$$

Damit haben wir also $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 03. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (8P)

Je 100g der folgenden Nahrungsmittel enthalten etwa entsprechend viel Kohlenhydrate, Fett und Eiweiß:

	Kartoffeln	Speck	Butter
Kohlenhydrate	14.5	1	0
Fett	0	40	81
Eiweiß	2	36	0

Der menschliche Körper benötigt jeden Tag etwa 240g Kohlenhydrate, 57g Fett und 60g Eiweiß. Wie müsste eine Mahlzeit aus Kartoffeln, Speck und Butter zusammengesetzt sein, um diesen Tagesbedarf genau zu decken?

Lösung 3.

Sei $K, S, B =$ Anzahl Kartoffeln/Speck/Butter in 100g Mengen. Wir erhalten dann das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll}
14,5 \cdot K & + & 1 \cdot S & + & 0 \cdot B & = & 240 & (Kohlenhydrate) \\
0 \cdot K & + & 40 \cdot S & + & 81 \cdot B & = & 57 & (Fett) \\
2 \cdot K & + & 36 \cdot S & + & 0 \cdot B & = & 60 & (Eiweiß)
\end{array}$$

Wir lösen zuerst die Kohlenhydrat-Gleichung nach S(=Speck) auf (da steht ja bereits eine 1):

$$14,5 \cdot K + 1 \cdot S + 0 \cdot B = 240 \iff S = 240 - 14,5K$$

Eingesetzt in die 3. Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
2 \cdot K + 36 \cdot S = 60 &\iff 2K + 36(240 - 14,5K) = 60 \\
&\iff -520K + 8640 = 240 \iff 520K = 8580 \iff K = 16,5
\end{aligned}$$

Eingesetzt in unsere Speckgleichung ergibt $S = 240 - 14,5K = 240 - 239,25 = 0,75 = 3/4$.
Für die Butter betrachten wir die 2. Gleichung und setzen S ein:

$$40S + 81B = 57 \iff 30 + 81B = 57 \iff 81B = 27 \iff B = 1/3$$

Die Mahlzeit würde also aus $K \cdot 100g = 1,65$kg Kartoffeln, $S \cdot 100g = 75g$ Speck und etwa $B \cdot 100g \simeq 33,3g$ Butter bestehen. Versuchen Sie nun dies als neues Mensa-Menü vorzuschlagen.

Aufgabe 4. (5P + 5P)

Gegeben sei ein homogenes LGS

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{1,1} \cdot x_1 & + & a_{1,2} \cdot x_2 & + \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & 0 \\
a_{2,1} \cdot x_1 & + & \dots & & + & a_{2,n} \cdot x_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & 0
\end{array}$$

Weiterhin haben wir bereits zwei Lösungsvektoren

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$$

dieses LGS gegeben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 03. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

a) Zeigen Sie, dass dann auch ihre Summe

$$v + w := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

eine Lösung des homogenen LGS ist.
Hinweis: Betrachten Sie jede Zeile des Gleichungssystem vorerst für sich.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass die Aussage aus Teil a) für inhomogene LGS im Allgemeinen falsch ist.

Lösung 4.

a) Wir setzen $x := v + w$ einmal in das Gleichungssystem ein und erhalten für die erste Zeile:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= a_{1,1}(v_1 + w_1) + \cdots + a_{1,n}(v_n + w_n) && \mid (\textit{Distributivgesetz}) \\ &= a_{1,1}v_1 + a_{1,1}w_1 + \cdots + a_{1,n}v_n + a_{1,n}w_n && \mid (\textit{Kommutativgesetz}) \\ &= \underbrace{a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n}_{=0,\text{ da } v \in \mathbb{L}} + \underbrace{a_{1,1}w_1 + \cdots + a_{1,n}w_n}_{=0,\text{ da } w \in \mathbb{L}} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir auch die anderen Gleichungen (wir ersetzen nur $a_{1,j}$ überall durch $a_{i,j}$). Also ist auch $v + w$ eine homogene Lösung.

Genauso erhalten wir übrigens auch, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ der Vektor $\lambda v := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$ eine homogene Lösung ist.

b) Es ist sogar noch schlimmer: Wie in a) sehen wir, dass wenn v eine Lösung des LGS mit $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ und w eine LGS mit $b' := \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$ ist, dann ist $v + w$ eine Lösung des LGS für $b + b'$ auf der rechten Seite. Ist also $b = b' \neq 0$, dann löst $v + w$ das LGS für $2b \neq b$.
Ein explizites Bsp. wäre das LGS mit 2 Unbekannten und 1 Gleichung

$$x + y = 1$$

Zwei offensichtliche Lösungen wären $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $1 + 0 = 1$ und $0 + 1 = 1$.

Aber $v + w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ löst das LGS nicht, denn $1 + 1 = 2 \neq 1$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 03. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.