0 Aussagenlogik

Definition 0.1
Wenn aus einer Aussage „A“ eine Aussage „B“ folgt, schreiben wir „$A \Rightarrow B$“ und sagen „A impliziert B“ oder „Aus A folgt B“.

Beispiel 0.2
Typische Beispiele von wahren Implikationen wären (mit ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$):

a) Es regnet $\Rightarrow$ die Erde wird nass.

b) Heute ist Samstag $\Rightarrow$ es ist Wochenende

c) Es ist Freitag der 3. November 2023 $\Rightarrow$ heute ist letzter Abgabetag des Übungsblatts

d) $a = 4 \Rightarrow a$ ist gerade.

e) $a > b \Rightarrow a + 2 > b + 2$.

f) Schweine fliegen $\Rightarrow$ Date

g) Die Erde ist flach $\Rightarrow$ wir fallen nicht herunter

Hier sollte noch erwähnt werden, dass die Implikation f) stimmt, da Schweine nicht fliegen, d.h. „aus einer falschen Aussage können wir eine beliebige Aussage folgern “. Ob wir nun ein Date bekommen oder nicht wissen wir immernoch nicht (wobei wir in diesem Fall eher von einem „Nein“ ausgehen können).
In g) haben wir das Gegenstück: Die Aussage dass wir nicht herunterfallen ist immer wahr, daher ist jede Implikation „$A \Rightarrow$ wir fallen nicht herunter“ wahr, unabhängig ob A nun stimmt oder nicht.

Definition 0.3
Gilt sowohl „$A \Rightarrow B$“ als auch „$B \Rightarrow A$“, dann schreiben wir „$A \iff B$“ und sagen „A ist äquivalent zu B“ oder „Es gilt A genau dann, wenn auch B gilt.“
Beispiele für Äquivalenzen sind in Beispiel 0.2 c) und e).

Bemerkung 0.4
Gegeben seien zwei (wahre) Implikationen „$A \Rightarrow B$“ und „$B \Rightarrow C$“.

a) Wir haben dann direkt die Implikation „$A \Rightarrow C$“, denn wenn A gilt, dann gilt B und wenn B gilt, dann gilt sogar C.

b) Aus „$A \Rightarrow B$“ folgt direkt die Implikation „nicht $B \Rightarrow$ nicht A“, d.h. wenn B nicht gilt, darf auch nicht A gelten (sonst hätten wir A gilt und damit auch B).

c) Es folgt aus „$A \Rightarrow B$“ **nicht** die Implikation „nicht $A \Rightarrow$ nicht B“. Beispiele wären hierzu 0.2 b) (es könnte ja auch Sonntag sein) und d) (für $a = 2$ gilt $a \neq 4$, aber 2 ist gerade).

Beispiel 0.5

a) Ist $a \in \mathbb{N}$ nicht gerade, dann kann a nicht 4 sein.

Wir gehen in den folgenden Beispielen davon aus, dass Füchse Hasen zum Fressen brauchen, d.h. „Füchse anwesend $\Rightarrow$ Hasen anwesend“, und Hasen benötigen Salat zum Fressen, also „Hasen anwesend $\Rightarrow$ Salat anwesend“.

b) Sind keine Hasen vorhanden, können keine Füchse da sein, sprich „keine Hasen anwesend $\Rightarrow$ keine Füchse anwesend“.

c) Sind Füchse anwesend, dann muss auch Salat anwesend sein
(wir folgern „Füchse $\Rightarrow$ Hasen $\Rightarrow$ Salat“).

d) Nach vorigem Beispiel impliziert die Abwesenheit von Salat, dass es keine Füchse vor Ort gibt.

e) Falls wir aber später einmal Füchse finden, ohne dass Salat vorhanden ist, d.h. die Implikation „Füchse $\Rightarrow$ Salat“ ist falsch, dann war bereits mindestens eine der beiden ursprünglichen Implikationen „Füchse $\Rightarrow$ Hasen“ oder „Hasen $\Rightarrow$ Salat“ falsch.