Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (4P+6P)

Berechnen Sie alle (komplexen) Eigenwerte und Eigenräume der beiden folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 2+i & -i \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. (3P+3P+2P+4P=12P)

Untersuchen Sie, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $a_n := q^n$ konvergiert bzw. bestimmt divergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Sie können dabei wie folgt vorgehen:

a) Betrachten Sie die drei Folgen für $q = -1, 0, 1$.

b) Für $q > 1$ schreiben Sie $q = 1 + r$ für ein $r = q - 1 > 0$. Sie dürfen hier für $r > 0$ die Ungleichung $(1 + r)^n \geq 1 + rn$ benutzen.[1]

c) Betrachten Sie für $0 < q < 1$ den Kehrwert $\frac{1}{q} > 1$.

d) Für $q < 0$ können Sie es durch Multiplikation mit einer alternierenden Folge auf einen der vorigen Fälle zurückführen.

Aufgabe 3. (je 2P=12P)

Geben Sie bei den folgenden Folgen jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder ob sie bestimmt divergent sind.

a) $a_n := \dfrac{2n^3 - 3n^2 + n - 1}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n}$

b) $b_n := \dfrac{3n^3 - 2n + 1}{(n+2)^2}$

c) $c_n := \dfrac{(2n+3)^2}{(2+3n)^2}$

d) $d_n := \dfrac{2^n - 3}{3^n}$

e) $e_n := \sin(\dfrac{\pi \cdot n}{2}) \cdot n$

f) $f_n := (n-1)^2 - (n+1)^2$

Hinweis: *Sie dürfen hier aus Aufgabe 2 benutzen, dass q^n für $q = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ eine Nullfolge ist.*

[1] Die Ungleichung kommt von der Binomialentwicklung $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} a^k b^{n-k}$. Hierbei bezeichnet $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die n-te Fakultät.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (3P+3P)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihre Differenz.

a) Sei zusätzlich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ konvergiert, wenn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Finden Sie ein Beispiel, für das $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, aber $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 42 konvergiert.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.