Wir fassen hier nochmal schnell die Diagonalisierbarkeit zusammen. Das ganze gilt übrigens auch, wenn wir überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen.

Sei ab nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

Satz 3.10 a) Die Eigenwerte von A sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(X) = \det(X \cdot I_n - A)$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, dann ist der Eigenraum gerade die homogene Lösungsmenge von $\lambda I_n - A$, d.h. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \{v \in \mathbb{R} \mid (\lambda I_n - A)v = 0\}$.

Definition 3.12
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A.

a) Die algebraische Vielfachheit $a(\lambda) \in \mathbb{N}$ von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $\chi_A(X)$.

b) Die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) \in \mathbb{N}$ von λ ist die Dimension ($\widehat{=}$ minimale Anzahl von Parametern/Freiheitsgraden) von $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$. Das ist gerade die Anzahl Nullzeilen von der Zeilen-Stufen-Form von $\lambda I_n - A$.

Beispiel 3.13 a) Für $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\chi_A(X) = (X-3)^2(X+1)^3$, also $g(3) = 2$ und $g(-1) = 3$. $3I_5 - A$ und $-1 \cdot I_5 - A$ sind beide bereits in reduzierter Zeilen-Stufen-Form, z.B. $-1 \cdot I_5 - A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine Nullzeile und damit $g(-1) = 1$. Wir lesen direkt $\operatorname{Eig}(A, -1) = \{v \mid (-1 \cdot I_5 - A)v = 0\} = \{t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ab.

b) Die Matrix $B := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat als charakteristisches Polynom $\chi_B(X) = \det(X \cdot I_3 - B) = \det(\begin{pmatrix} X+3 & -3 & -6 \\ -1 & X+1 & 2 \\ 2 & -2 & X-4 \end{pmatrix}) = (X+3)(X+1)(X-4) - 3 \cdot$

$2 \cdot 2 - 12 + 12(X+1) + 4(X+3) - 3(X-4) = \cdots = X^3$ und damit $a(0) = 3$. Für die geometrische Vielfachheit bringen wir $0 \cdot I_3 - B = -B$ in Zeilen-Stufen-Form und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; | \cdot (-1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Eig}(B, 0) = \{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \}$$

und insbesondere $g(0) = 2$.

Satz 3.15
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent (d.h. „$a) \iff b)$“):

a) $\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n$

b) Es existieren n Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ von A, sodass die Matrix $U := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ invertierbar ist und $U^{-1}AU = D$ eine Diagonalmatrix ist.

Wenn A eine der beiden (und damit auch die andere) Aussagen erfüllt, nennt man A diagonalisierbar. Die Einträge in D sind dann gerade die Eigenwerte der v_i und damit die Eigenwerte von A mit entsprechenden Vielfachheiten.

Bemerkung
Die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ in Satz 3.15 können wir wie folgt berechnen: Für jeden Eigenwert λ bringen wir $\lambda I_n - A$ in reduzierte Zeilen-Stufen-Form $\tilde{A}_\lambda$. Seien $i_1, \ldots, i_l$ die Spalten von $\tilde{A}_\lambda$ die kein Pivot-Element enthalten. Indem wir die Einträge $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ als Parameter wählen, erhalten wir wie in Kapitel 1 die homogene Lösungsmenge von $(\lambda I_n - A \mid 0)$. Setzen wir immer genau ein $x_{i_s} = 1$ und alle anderen Parameter $x_{i_t} = 0$, erhalten wir also l verschiedene Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Insgesamt erhalten wir für alle Eigenwerte damit n verschiedene Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und die Matrix $U := (v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ ist automatisch invertierbar.

Beispiel 3.16 a) Wenn die algebraischen und damit die geometrischen Vielfachheiten alle 1 sind (das ist in der Anwendung meist der Fall), dann erhält man für eine diagonalisierbare Matrix je einen Eigenvektor (und seine Vielfachen) pro Eigenwert. Z.B. für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

hatten wir die Eigenräume $\mathrm{Eig}(A,2) = \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\mathrm{Eig}(A,3) = \{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ berechnet. Damit ist $U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar und nach der Formel für Inverse von 2×2-Matrizen ist $U^{-1} = \frac{1}{\det(U)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix})$.
Ausrechnen liefert $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als charakteristische Polynom erhalten wir (mit Entwicklung nach der ersten Spalte und anschließend Entwicklung nach der ersten Zeile):

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot I_4 - A) = \det(\begin{pmatrix} X-1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & X \end{pmatrix})$$

$$= (X-1)\det(\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 3 & 1 & X \end{pmatrix}) = (X-1)^2 \det(\begin{pmatrix} X-1 & 0 \\ 1 & X \end{pmatrix}) = (X-1)^3 X$$

Also haben wir die Eigenwerte 1 und 0 mit algebraischen Vielfachheiten $a(1) = 3$ und $a(0) = 1$. Für die Eigenräume erhalten wir:

$\mathrm{Eig}(A,1)$:

$$(1 \cdot I_4 - A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | : (-3)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Eig}(A,1) = \{x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix} \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \text{ und } g(1) = 3$$

$\operatorname{Eig}(A,0)$:

$$(1 \cdot I_4 - A) = \begin{pmatrix}-1 & -3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & -3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & -3 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-1)\\ \mid \cdot(-1)\\ \mid \cdot(-1)\\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Eig}(A,0) = \{x_4 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Wir nehmen also für den Eigenwert 1 die Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix}0\\-1/3\\1\\0\end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix}0\\-1/3\\0\\1\end{pmatrix}$$

und für den Eigenwert 0 den Eigenvektor $v_4 := \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Als Matrix ergibt sich dann $U := (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Die Inverse dazu lässt sich wie üblich ausrechnen und ist $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ein Test ergibt

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,1,1,0)$$

Anwendung 3.17
Wir können die Diagonalisierbarkeit benutzen um leicht Potenzen von Matrizen zu berechnen: Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ gilt. Weiterhin folgt aus $A = UDU^{-1}$ bereits

$$A^k = UD\underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=I_n} DU^{-1} \cdot \dots \cdot UDU^{-1} = UDI_nDI_n \cdot \dots \cdot DU^{-1} = UD^kU^{-1}.$$

Eine Anwendung davon ist das Umwandeln von rekursiv definierten Folgen zu expliziter Darstellung. Z.B. sind die Fibonacci-Zahlen definiert durch

$$a_0 := 0, a_1 := 1 \text{ und für } n \in \mathbb{N} \text{ist } a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$$

d.h. jedes weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

die zwei Folgenelemente auf ihre nachfolgenden Elemente abbildet. Diese ist linear und wir können sie als Matrizenmultiplikation betrachten:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A:=} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n-mal} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen also A diagonalisieren. Wir gehen vor wie immer: $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1$ hat als Nullstellen:

$$\begin{aligned} X^2 - X - 1 = 0 &\iff (X - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 1 \\ &\iff (X - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ &\iff X - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\iff X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Also haben wir die beiden Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Den Eigenwert $\lambda_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kennt man auch als den goldenen Schnitt. Der Einfachheit halber benutzen wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \Rightarrow 1 - \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda 2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 \end{aligned}$$

Für die Eigenräume erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) : \\ &\lambda_i I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda_i - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{+} \\ \lrcorner_{\lambda_i - 1} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda_i^2 - \lambda - 1 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad (\text{ da } \lambda_i^2 - \lambda - 1 = \chi_A(\lambda_i) = 0) \\ &\qquad \Longrightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \{t \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Wir erhalten also für $U := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse $U^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Wir testen nochmal unsere Diagonalisierung nach (das braucht man eigentlich nicht unbedingt zu machen):

$$\begin{aligned}
U^{-1}AU &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & \lambda_2+1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1+1-\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2+1-\lambda_2^2 \\ -\lambda_1-1+\lambda_1^2 & -\lambda_2-1+\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c} \lambda_2+1-\lambda_2^2 = -\chi_A(\lambda_2) = 0 \\ -\lambda_1-1+\lambda_1^2 = \chi_A(\lambda_1) = 0 \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1+2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eine kleine Nebenrechnung ergibt

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}\cdot\lambda_1 &= \frac{\sqrt{5}+5}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 = \lambda_1 + 2 \\
\text{und } \sqrt{5}\lambda_2 &= \frac{\sqrt{5}-5}{2} = -\lambda_2 - 2
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt erhalten wir also tatsächlich $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D$ und damit $A = UDU^{-1}$. Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (UDU^{-1})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = UD^nU^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow a_n &= \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$