Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 5. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+2P+3P+3P+3P)

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen jeweils die Determinante in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$

a) $A := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 3 \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C := \begin{pmatrix} 4 & t & 1 \\ 2t & 3 & -3t \\ 2 & t & 4 \end{pmatrix}$

d) $D := \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & t \\ t & -1 & 2 \end{pmatrix}$

und geben Sie jeweils an, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen invertierbar sind.

Lösung 1.

Wir benutzen die expliziten Formeln für 2×2- und 3×3-Matrizen aus der Vorlesung.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{6} \cdot 3 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= 3 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 2 \\ &= 4 + 8 - 12 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(C) &= 4 \cdot 3 \cdot 4 + t \cdot (-3t) \cdot 2 + 1 \cdot 2t \cdot t - 2 \cdot 3 \cdot 1 - t \cdot (-3t) \cdot 4 - 4 \cdot 2t \cdot t \\ &= 48 - 6t^2 + 2t^2 - 6 + 12t^2 - 8t^2 = 42 + t^2 \cdot (-6 + 2 + 12 - 8) = 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + t \cdot t \cdot t + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - t \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot t \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot t \\ &= t^3 - t + t - 4t = t^3 - 4t = t(t^2 - 4) \end{aligned}$$

Die Matrizen sind genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist. Für A, B, C ist das unabhängig von t, nämlich A und C sind immer invertierbar und B nicht. D ist genau dann nicht invertierbar, wenn $t(t^2 - 4) = 0$ gilt, also wenn $t \in \{0, \pm 2\}$ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 2. (6P)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 20 & 1 & 12 & 2023 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2.

Am geschicktesten entwickelt man hier nach der dritten Spalte, da wir hier nur einen Nicht-Null-Eintrag haben. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 20 & 1 & 12 & 2023 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot \det(A_{1,3}) - 0 \cdot \det(A_{2,3}) + 0 \cdot \det(A_{3,3}) - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det(A_{5,3}) \qquad | \text{ 2. Zeile entw.} \\
&= -(-1 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}) \\
&= -3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) \cdot 4 \\
&\quad +3 \cdot (1 - 6 + 0 - 8 - 1 - 0) \\
&= 6 + 8 - 1 + 1 - 6 - 8 + 3 \cdot (-14) = -42
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (4P+2P+1P)

Wir betrachten für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ wieder die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

von letztem Blatt.

a) Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.

b) Wir können $\det(A)$ als Funktion in $t \in \mathbb{R}$ betrachten. Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 0$?

c) Vergleichen Sie Aufgabenteil b) mit Ihrem Ergebnis von Aufgabe 2 b) auf Übungsblatt 4. Was fällt Ihnen auf?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Lösung 3.

a) Wir entwickeln nach der ersten Spalte und wenden dann Sarrus an:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ t & 0 & 2 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix} \\
&= -1(-t-6-3+6+3+t) + 2(0-4+3t-0+2-t^2) = 2(-t^2+3t-2)
\end{aligned}$$

b) Nach der Mitternachtsformel oder quadratischer Ergänzung (s. letztes Blatt) sind die Nullstellen gerade bei $t = 1$ und $t = 2$.

c) Das sind gerade die Werte von Blatt 4 für die A nicht invertierbar ist. Wir wissen ja, dass A genau dann nicht invertierbar ist, wenn $\det(A) = 0$ gilt, also passt das.

Aufgabe 4. (7P+7P)

a) Für einen Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Matrix

$$A_v := \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \det(A_v)$$

linear ist, d.h. es gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

Bemerkung: *Es gilt übrigens noch allgemeiner, dass die Determinante linear in jeder Spalte ist (dazu sagt man, dass die Determinante multilinear ist). Das heißt, wenn wir bei einer Matrix $(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Spalte v_i durch einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ ersetzen, erhalten wir die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid w \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n).$$

Sie dürfen statt der Aufgabe a) natürlich auch den allgemeinen Fall zeigen.

b) Gegeben sei eine Matrix $A := (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass wenn $v_1 = v_2$ gilt, dann ist bereits $\det(A) = 0$.

Hinweis: *Entwickeln Sie einmal nach der ersten und einmal nach der zweiten Spalte. Sie können für bis zu 4 Teilpunkte die Aufgabe auch für $n = 3$ mit Hilfe der Spaltenentwicklung lösen.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Lösung 4.

a) Wir zeigen zuerst den allgemeinen Fall:
Die Spaltenentwicklung nach der i-ten Spalte liefert dann für $v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(v+w) &= \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v+w \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (v+w)^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (v^{(j)} + w^{(j)}) \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} v^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \right) \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} w^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \right) \\
&= \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n) \\
&\quad + \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid w \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n) \\
&= f(v) + f(w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot v) &= \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid \lambda \cdot v \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (\lambda v)^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \lambda v^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \\
&= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} v^{(j)} \det((v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j) \\
&= \lambda \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n) = \lambda f(v)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $v^{(j)}$ den j-ten Eintrag von v und $(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n)_j$ die Matrix die durch Streichen der j-ten Zeile entsteht (die i-te Spalte haben wir ja bereits weggemacht).

Wenn man das für das explizite Beispiel macht, kann man das entweder wieder entwickeln wie oben oder wir schreiben das mit der Formel aus und erhalten für $v := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a+c & 2 \\ b+d & 3 \end{pmatrix}) &= (a+c)3 - 2(b+d) \\
&= 3a - 2b + 3c - 2d = \det(\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} c & 2 \\ d & 3 \end{pmatrix}) = f(v) + f(w)
\end{aligned}$$

und entsprechend genauso:

$$f(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda a & 2 \\ \lambda b & 3 \end{pmatrix} = \lambda a 3 - \lambda 2 b = \lambda(a3 - 2b) = \lambda \det(\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}) = \lambda f(v)$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

b) Wir folgen dem Hinweis und erhalten für die Spaltenentwicklung nach der ersten bzw. zweiten Spalte:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) \\ &\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2})\end{aligned}$$

Da aber $v_1 = v_2$ gilt, sind insbesondere die Einträge $a_{i,1} = a_{i,2}$ und die Streichungsmatrizen $A_{i,1} = A_{i,2}$ gleich. Eingesetzt in $(\star)$ erhalten wir also auch die Gleichung

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) \\ &\overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} a_{i,1} \det(A_{i,1}) = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) = -\det(A)\end{aligned}$$

Aus $\det(A) = -\det(A)$ folgt dann schon direkt, dass $\det(A) = 0$ gelten muss.

Für den Fall $n = 3$ sieht das etwas expliziter aus. Ein solches A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{pmatrix}.$$

Die Spalten-Entwicklungen nach der ersten und zweiten Zeile wären dann:

$$\begin{aligned}\det(A) &= a \cdot \det \begin{pmatrix} b & d \\ c & f \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} \qquad | \text{ nach 1. Spalte} \\ \det(A) &= -a \cdot \det \begin{pmatrix} b & d \\ c & f \end{pmatrix} + b \cdot \det \begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} - c \det \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} \qquad | \text{ 2. Spalte} = -\det(A)\end{aligned}$$

Wie zuvor sieht man, dass $\det(A) = -\det(A) \in \mathbb{R}$ nur für $\det(A) = 0$ gelten kann.