Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

6. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+2P+2P+2P+2P)

Geben Sie jeweils mit einer Begründung oder einem Gegenbeispiel an, ob die folgenden Abbildungen linear sind

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ b - a \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + 3 \\ b - 1 \end{pmatrix}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto |a - b|$

d) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c - a \\ b - c \\ a - b \end{pmatrix}$

und geben Sie gegebenenfalls eine Matrix A_i an, sodass $f_i(v) = A_i v$ gilt.

Aufgabe 2. (2P+4P+4P+2P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?

b) Berechnen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 3)$ zum Eigenwert 3 von A.

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und seine Nullstellen.

d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (3P+4P+4P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von A und B.

b) Finden Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch ausmultiplizieren.

Aufgabe 4. (2P+4P+2P)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, S eine invertierbare Matrix und $\tilde{A} := SAS^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(\tilde{A})$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $\tilde{A}$ bereits das charakteristische Polynom von A ist, d.h. es gilt $\chi_A(X) = \chi_{\tilde{A}}(X)$.
Hinweis: *Benutzen Sie, dass $X \cdot I_n$ mit allen Matrizen kommutiert, d.h. es gilt $(X \cdot I_n)S = S(X \cdot I_n)$.*

c) Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A. Zeigen Sie, dass dann $Sv \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von $\tilde{A}$ ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 08. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.