2 Gaußen via Matrizenmultiplikation

Wir erinnern uns daran, dass Gaußen durch elementare Zeilen-Umformungen passiert. Tatsächlich multiplizieren wir dabei von links mit invertierbaren Matrizen, auch Elementarmatrizen genannt. Bevor wir diese konstruieren, benötigen wir den Begriff einer Standardmatrix:

Definition 2.1
Für $1 \leq i, j \leq n$ definieren wir die *Standardmatrix*

$$E_{i,j} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bei der nur der Eintrag an der Stelle $e_{i,j} = 1$ gilt und sonst alle anderen Einträge 0 sind.

Beispiel 2.2
Für $n = 4$ sind

$$E_{2,3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } E_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $n = 3$ wäre

$$E_{3,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } E_{2,3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma 2.3
Für eine Matrix $A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gelten folgende Rechenregeln (das ist leicht nachzurechnen):

a) Für $E_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$E_{i,j} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

D.h. $E_{i,j}$ bildet die j-te Zeile von A auf die i-te Zeile und alles andere auf die Null.

b) Entsprechend erhalten wir auf der rechten Seite mit $E_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, dass

$$A \cdot E_{i,j} = \begin{array}{c} \hphantom{0 \ \dots \ 0 \ } \text{j-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

die i-te Spalte von A in die j-te Spalte abbildet und den Rest auf 0.

Definition 2.4
Für $1 \leq i, j \leq n$ und $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir die folgenden Matrizen:

a) $A_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ heißt *Additionsmatrix.*

b) $V_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ heißt *Vertauschungsmatrix.*

c) $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ heißt *Multiplikationsmatrix.*

Diese werden auch *Elementarmatrizen* genannt.

Beispiel 2.5
Für $n = 3$ haben wir die Beispiele:

a) $A_{2,3}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $V_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\operatorname{diag}(1, 2, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$

Bemerkung 2.6
Nach Lemma 2.3 und dem Distributivgesetz für Matrizen, wirken die Matrizen aus Definition 2.4 mit Linksmultiplikation wie folgt auf Matrizen:

a) Eine Additionsmatrix $A_{i,j}(\lambda)$ addiert das λ-fache der j-ten Zeile auf die i-te Zeile.

b) Eine Vertauschungsmatrix $V_{i,j}$ vertauscht die i-te Zeile mit der j-ten Zeile.

c) Eine Multiplikationsmatrix $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ multipliziert jede Zeile mit einem entsprechenden λ_i.

Die Elementarmatrizen sind alle invertierbar, mit $A_{i,j}(\lambda)^{-1} = A_{i,j}(-\lambda)$, $V_{i,j}^{-1} = V_{i,j}$ und $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Beispiel 2.7

Für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir folgende Ergebnisse

$$\begin{aligned} A_{2,3}(-4) \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2-8 & 1-12 & 4-0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & -6 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ V_{1,2} \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \operatorname{diag}(1, 2, \pi) \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ \pi & 2\pi & 3\pi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.8

Wenn wir von rechts multiplizieren, operieren wir auf den Spalten von A statt auf den Zeilen. Das benötigen wir hier aber nicht.

Bemerkung 2.9

Wenn wir „gaußen“, dann multiplizieren wir effektiv von links mit Elementarmatrizen aus Definition 2.4. Da diese invertierbar sind, ändern wir nicht das LGS, denn für eine Lösung x des LGS $Ax = b$ und eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

$$Ax = b \Rightarrow M(Ax) = Mb \Rightarrow \underbrace{M^{-1}(MAx)}_{=Ax} = \underbrace{M^{-1}(Mb)}_{=b}$$

Um nun eine Matrix zu invertieren, haben wir gegaußt, bis die Einheitsmatrix dastand. Nach obigem haben wir dabei effektiv so lange Elementarmatrizen multipliziert, bis wir eine Inverse hatten:

Beispiel 2.10

Wir möchten die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ durch Gaußen invertieren:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A_{1,2}(-3) \cdot A_{1,3}(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad V_{2,3} \cdot (A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A_{2,3}(1) \cdot (V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad | : (-6)$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{diag}(1, 1, -\frac{1}{6})A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A_{3,1}(-2)\operatorname{diag}(1, 1, -\frac{1}{6})A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also haben wir $A^{-1} = A_{3,1}(-2)\operatorname{diag}(1, 1, -\frac{1}{6})A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)$.

Satz 2.11
Jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich als endliches Produkt von Elementarmatrizen aus Definition 2.4 schreiben.

Bemerkung 2.12
Wir haben jetzt auch direkt gesehen, wie gaußen die Determinante verändert, da für Matrizen $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ gilt. Man rechnet leicht nach, dass $\det(A_{i,j}(\lambda)) = 0$ und $\det(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ gilt, da beide obere Dreiecksmatrizen sind und $\det(V_{i,j}) = -1$ gilt. Hiermit folgt auch schon Bemerkung 2.31 aus der Vorlesung.

Statt die Elementarmatrizen immer mitzunehmen und am Ende zu multiplizieren, können wir neben dem gaußen diese auch direkt multiplizieren. Beispiel 2.10 würde dann wie folgt aussehen:

Beispiel 2.13

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= I_3$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= A_{1,2}(-3) \cdot A_{1,3}(-1) \cdot I_3$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad | : (-6)$$

$$= A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$= \operatorname{diag}(1,1,-\tfrac{1}{6})A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3) \cdot A_{1,3}(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$= A_{3,1}(-2)\operatorname{diag}(1,1,-\tfrac{1}{6})A_{2,3}(1)V_{2,3}A_{1,2}(-3) \cdot A_{1,3}(-1) = A^{-1}$$

Für Links- und Rechtsinverse von Matrizen (die nicht quadratisch sind) haben wir noch folgende Aussage:

Proposition 2.14
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix, dann gilt:

a) A hat genau dann eine Links-Inverse, wenn ihre reduzierte Zeilen-Stufen-Form von der Art
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n\times(n-m)} \end{pmatrix}$$
ist, d.h. sie hat in jeder Spalte ein Pivot-Element.

b) A hat genau dann eine Rechts-Inverse, wenn ihre reduzierte Zeilen-Stufen-Form in jeder Zeile ein Pivot-Element hat.

Um Rechtsinverse einer Matrix zu berechnen, können wir wie in der Vorlesung das LGS $AX = I_n$ lösen. Wir können nun obiges auch benutzen um Linksinverse leichter zu berechnen. Dazu benötigen wir lediglich, dass eine Matrix der Form

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n\times(n-m)} \end{pmatrix}$$

als Linksinverse jede Matrix der Form $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & 0\dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \star & \dots & \star \end{pmatrix} = (I_m \mid \star)$ hat. Wir gaußen also ein entsprechendes A in reduzierte Zeilen-Stufen-Form und schneiden den Rest ab.

Beispiel 2.15
Wir wollen eine Linksinverse von $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ berechnen. Hierzu bringen wir A zunächst in reduzierte Zeilen-Stufen-Form mittels Elementarmatrizen (und notieren uns wie zuvor auf der rechten Seite ihr Produkt):

$$\left(\begin{matrix}1 & 0\\ 3 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{=I_3}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}}_{=A_{1,2}(-3)\cdot A_{1,3}(-1)}\right) \;|\cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}}_{=\operatorname{diag}(1,-1,1)A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{matrix}}_{=A_{2,3}(-1)\operatorname{diag}(1,-1,1)A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)}\right)$$

Also haben wir

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} A_{2,3}(-1)\operatorname{diag}(1,-1,1)A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)\cdot A$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = I_2.$$

Eine Linksinverse wäre also $\tilde{A} := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ (wir schneiden z.B. die letzte Zeile von $A_{2,3}(-1)\operatorname{diag}(1,-1,1)A_{1,2}(-3)A_{1,3}(-1)$ einfach ab). Man sieht hier, dass man dabei eigentlich gar nicht zu Ende hätte gaußen müssen. Es reicht eigentlich, wenn auf der linken Seite die Einheitsmatrix oben steht.

Bemerkung 2.16
Da uns meist nur das Produkt der Elementarmatrizen und nicht die einzelnen Faktoren, lässt man üblicherweise auf der rechten Seite die Faktoren unter der geschweiften Klammer weg und schreibt beispielsweise bei obiger Rechnung nur:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \;|\cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$