Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösungen für das 4. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (3P+4P+3P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse von A und B über die reduzierte Zeilen-Stufen-Form und überprüfen Sie jeweils Ihr Ergebnis, indem Sie $A \cdot A^{-1}$ oder $A^{-1}A$ (und entsprechend für B) rechnen.

b) Lösen Sie die LGS $Bx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $By = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Lösung 1.

a) Die beiden Matrizen entsprechend in die LGS eingesetzt ergibt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \rceil^{-2/3} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \qquad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & -2/3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \rceil^{-3/10} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 12/10 & -3/10 \\ 0 & \frac{10}{3} & -2/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :3 \\ \mid \cdot \frac{3}{10} \end{array} \qquad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & -2/10 & 3/10 \end{array}\right)$$

Also ist die Inverse $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, was eine Probe

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 12-2 & -3+3 \\ -6+6 & -2+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = I_2$$

auch bestätigt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Entsprechend verfahren wir mit B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2 \\ + \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5 \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & + \\ + & \\ -1 & -3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 15 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -2 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Also ist die Inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Probe ist hier

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -1+1 & -2+2 \\ -6+6 & 2-1 & 2-2 \\ 3+12-15 & -1-2+3 & -1-4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Da B invertierbar ist, erhalten wir die Lösungen

$$x = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } y = B^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (4P+3P+3P)

Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bringen Sie A in Zeilen-Stufenform.

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?

c) Bestimmen Sie jeweils die homogene Lösungsmenge $Ax = b$: Einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A invertierbar ist, und einmal für ein $t \in \mathbb{R}$, für das A nicht invertierbar ist.
Bemerkung: Falls Sie Aufgabenteil b) nicht gelöst haben, verwenden Sie stattdessen $t = 1$ und $t = -1$.

Lösung 2.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1-2t & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2t & -4-6t \\ 0 & 0 & -1 & t-6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & t-6 \\ 0 & 0 & -2t & -4-6t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & t-6 \\ 0 & 0 & 0 & -2t^2+12t-4-6t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & t-6 \\ 0 & 0 & 0 & -2t^2+6t-4 \end{pmatrix}$$

b) A ist genau dann invertierbar, wenn wir alle LGS $Ax = b$ lösen können, also die Zeilen-Stufen-Form in jeder Zeile ein Pivot-Element hat. Nach a) geht das nur, wenn $-2t^2 + 6t - 4 \neq 0$ gilt.

Wir lösen also $-2t^2 + 6t - 4 = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0$ (z.B. durch quadratische Ergänzung oder die Mitternachtsformel):

$$\begin{aligned} & t^2 - 3t + 2 = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}^2 + 2 \overset{(!)}{=} 0 \\ \iff & (t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 2 \\ \iff & t - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ \iff & t = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \iff t \in \{2, 1\} \end{aligned}$$

Also ist A für $t \neq 1, 2$ invertierbar.

c) Wenn A invertierbar ist (z.B. für $t = 0$), dann hat das homogene LGS $Ax = 0$ nach Vorlesung nur die triviale Lösung $x = 0$.

Für $t = 1$ in die obige Zeilen-Stufen-Form eingesetzt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Wir wählen $x_4 \in \mathbb{R}$ als freien Parameter und erhalten damit $\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -2x_4 \\ -5x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Für $t = 2$ erhalten wir für die homogene Lösungsmenge genauso $\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -x_4 \\ -4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3. (2P+4P+2P)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine Matrix B mit $BA = I_n$.

a) Welche Dimensionen hat B? D.h. bestimmen Sie $k, l \in \mathbb{N}$, sodass $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ gilt. Begründen Sie wie immer Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie Bemerkung 2.10 a) aus der Vorlesung für quadratische Matrizen:
Sei nun zusätzlich $n = m$ und C eine Rechtsinverse von A. Zeigen Sie, dass dann bereits $B = C$ gilt.

c) Folgern Sie, dass für eine invertierbare Matrix die Inverse eindeutig ist.

Lösung 3.

a) Da wir B links an A multiplizieren, muss bereits $l = m$ gelten. Da B eine Linksinverse ist, gilt $BA = I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Da die Dimensionen entsprechend „vererbt“werden, gilt damit $k = n$.

b) Da C eine Rechtsinverse von A ist, gilt auch $AC = I_n$. Wir haben also die Gleichungen

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Hierbei haben wir lediglich die Eigenschaften von Links- bzw. Rechtsinversen und der Einheitsmatrix benutzt, sowie die Assoziativität der Matrizenmultiplikation.

c) Ist B' eine weitere Inverse von A, dann ist es insbesondere auch eine Rechtsinverse von A und nach b) gilt bereits $B' = B$.

Aufgabe 4. (2P+2P+1P+3P+4P)

Wir sagen eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Projektion, wenn $P^2 = P$ gilt.

a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass dann auch $(I_n - P)$ eine Projektion ist.

b) Zeigen Sie, dass für eine Projektion $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das LGS $Px = b$ genau dann eine Lösung hat, wenn b bereits selbst eine Lösung ist.

c) Gegeben sei die Matrix

$$P := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist.

(ii) Finden Sie alle $x \in R^4$ mit $Px = 0$.

(iii) Finden Sie alle $x \in R^4$ mit $Px = x$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Lösung 4.

a) Wir müssen lediglich das Quadrat von $(I_n - P)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
(I_n - P)^2 &= (I_n - P) \cdot (I_n - P) && \mid \text{Distributivgesetz} \\
&= I_n(I_n - P) - P(I_n - P) && \mid \text{Distributivgesetz} \\
&= I_n I_n - I_n P - P I_n + P^2 && \mid I_n A = A \quad \text{und } P^2 = P \\
&= I_n - P - P + P = I_n + P
\end{aligned}$$

b) „$\Rightarrow$ “: Ist $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung, dann gilt $Px = b$ und damit $Pb = P(Px) = P^2x = Px = b$. Also ist dann auch bereits b eine Lösung.
„$\Leftarrow$ “: Ist klar, denn wir haben ja die Lösung b.

c) (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+1+1-1 & -1-1+1-1 & -1-1-1+1 & -1-1+1-1 \\ -1-1-1+1 & 1+1-1+1 & 1+1+1-1 & 1+1-1+1 \\ -1+1-1-1 & 1-1-1-1 & 1-1+1+1 & 1-1-1-1 \\ 1-1+1+1 & -1+1+1+1 & -1+1-1-1 & -1+1+1+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = P
\end{aligned}$$

Wir können die (ii) durch Lösen des homogenen LGS lösen oder wir verwenden Teil (iii):

(iii) Wir verwenden Teil b), dass $Pb = b$ genau dann gilt, wenn $Px = b$ für irgendein $x \in \mathbb{R}^4$ gilt. Damit erhalten wir als Lösungsmenge für die Gleichung $Px = x$:

$$\mathbb{L} = \{Pv \mid v \in \mathbb{R}^4\} = \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b-c-d \\ -a+b+c+d \\ -a-b+c-d \\ a+b-c+d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

$$(= \{\begin{pmatrix} s-t \\ -s+t \\ -s-t \\ s+t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R}\})$$

Bei der letzten Gleichung haben wir $2s = a - c$ und $2t = b + d$ gesetzt.

Alternativ: Man kann die Gleichung $Px = x$ auch umschreiben zu $0 = Px - x = (P - I_n)x$, d.h. man löst das homogene LGS $(P - I_n)x = 0$.

(ii) Statt das homogene LGS zu lösen (das geht hier natürlich genauso gut), verwenden wir hier die (iii). Die Gleichung $Px = 0$ können wir durch addieren von x auf beiden Seiten umschreiben zu

$$(I_n - P)x = I_n x - Px = x - 0 = x.$$

Nach a) ist auch $(I_n - P)$ eine Projektion und wir können (iii) verwenden. Also ist die homogene Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(I_n - P)v \mid v \in \mathbb{R}^4\} = \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v \mid v \in \mathbb{R}^4\}$$

$$= \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b-c-d \\ a+b+c+d \\ -a-b+c+d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda-\mu \\ \lambda+\mu \\ -\lambda+\mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

wobei wir wieder in der letzten Gleichung $2\lambda = a + b$ und $2\mu = c + d$ gesetzt haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 24. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.