Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 3. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (15P)

Gegeben sei das folgende LGS mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & a & -4 \end{array}\right)$$

Geben Sie an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das LGS eine Lösung besitzt und geben Sie entsprechend die Lösungsmengen in Abhängigkeit von a an.

Lösung 1.

Wir gaußen soweit wir können:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & a & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2-2a & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a+2 & -4-2a \end{array}\right)$$

Fall $a \neq 1, -2$:
Hier sind wir bereits in Zeilen-Stufen-Form mit einem Pivot-Element in jeder Spalte. Wir erhalten also eine eindeutige Lösung, z.B. durch Rückwärts einsetzen oder fertig gaußen (man beachte, dass wir wegen $a \neq 1, -2$ niemals durch 0 teilen!):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2-2a & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a+2 & -4-2a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2-2a & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a+2 & -2(a+2) \end{array}\right) \quad |:(a+2)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 2-2a & 1+a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a-2 \\ 0 & 2-2a & 0 & 1-a^2+2+2a \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad |:(2-2a))$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a-2) - \frac{-a^2+2a+3}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 17. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{(a-2)(1-a)+a^2-2a-3}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \qquad = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-a^2-2+2a+a^2-2a-3}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-5}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Also ist für $a \neq 1, -2$ die eindeutige Lösung $\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} \frac{a-5}{1-a} \\ \frac{-a^2+2a+3}{2-2a} \\ -2 \end{pmatrix}\} = \{\frac{1}{2-2a}\begin{pmatrix} 2a-10 \\ -a^2+2a+3 \\ 4a-4 \end{pmatrix}\}$.

Fall $a = 1$: Wir setzen $a = 1$ ein und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 1-1 \\ 0 & 0 & 3 & -4-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3/2 \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Wegen der letzten Zeile erhalten wir die Gleichung $0 = -6$, also hat das LGS für $a = 1$ keine Lösung.

Fall $a = -2$: Wir setzen $a = -2$ ein und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2+4 & 1-2 & 1-4 \\ 0 & 0 & 0 & -4+4 \end{array}\right) \qquad = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :6 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -2 \\ \\ \end{array} \qquad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4/6 & -1 \\ 0 & 1 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können also x_3 frei wählen und erhalten für den Fall $a = -2$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{3}x_3 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6+4x_3 \\ -3+x_3 \\ 6x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 2. (10P)

Wir bezeichnen mit $e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times n}$ eine Koeffizientenmatrix, sodass das LGS $(A \mid e_i)$ für alle $i = 1, 2, 3$ eine Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass dann bereits jedes LGS $(A \mid b)$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung besitzt.

Lösung 2.

Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$ Lösungen für $Ax_i = e_i$ und $b = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$. Dann gilt für $v = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ wegen der Linearität der Matrizenmultiplikation:

$$\begin{aligned}Av &= A(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = A(b_1x_1) + A(b_2x_2) + A(b_2x_2)\\ &= b_1Ax_1 + b_2Ax_2 + b_1Ax_2 = b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}b_1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = b\end{aligned}$$

Aufgabe 3. (5P)

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, sodass die Gleichung $A + B = C$ gilt.

Lösung 3.

Da die Addition eintragsweise passiert, erhalten wir, dass es $B = \begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\2 & -3 & 3\end{pmatrix}$ tut.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 17. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (10P)

Geben Sie für jedes Paar A_i, B_i von Matrizen an, ob jeweils die Produkte $A_i \cdot B_i, B_i \cdot A_i$ und $A_i \cdot A_i$ existieren und berechnen Sie gegebenenfalls diese.

a) $A_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 4.

a) Wegen $A_1 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B_1 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, können wir sowohl $A_1 B_1$, als auch $B_1 A_1$ berechnen. A_1 ist nicht quadratisch, deswegen existiert $A_1 \cdot A_1$ nicht.

$$A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 2-4+3 & 2-2+0 \\ 2-2+0 & 2-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_1 A_1 = \begin{pmatrix} 2+2 & -2-1 & 1+0 \\ 4+2 & -4-1 & 2+0 \\ 6+0 & -6+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Wegen $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, existiert $A_2 B_2$ aber nicht $B_2 A_2$. Da A_2 quadratisch ist, existiert auch $A_2 \cdot A_2$.

$$A_2 B_2 = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+4 & -1+2 & 0+2 \\ 0+0 & 0-2 & 0-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 17. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.