Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

5. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (2P+2P+3P+3P+3P)

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen jeweils die Determinante in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$

a) $A := \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 3 \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C := \begin{pmatrix} 4 & t & 1 \\ 2t & 3 & -3t \\ 2 & t & 4 \end{pmatrix}$

d) $D := \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & t \\ t & -1 & 2 \end{pmatrix}$

und geben Sie jeweils an, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrizen invertierbar sind.

Aufgabe 2. (6P)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 20 & 20 & 1 & 12 & 2023 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. (4P+2P+1P)

Wir betrachten für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ wieder die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & t & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

von letztem Blatt.

a) Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.

b) Wir können $\det(A)$ als Funktion in $t \in \mathbb{R}$ betrachten. Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 0$?

c) Vergleichen Sie Aufgabenteil b) mit Ihrem Ergebnis von Aufgabe 2 b) auf Übungsblatt 4. Was fällt Ihnen auf?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (7P+7P)

a) Für einen Vektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Matrix

$$A_v := \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \det(A_v)$$

linear ist, d.h. es gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$$

Bemerkung: *Es gilt übrigens noch allgemeiner, dass die Determinante linear in jeder Spalte ist (dazu sagt man, dass die Determinante multilinear ist). Das heißt, wenn wir bei einer Matrix $(v_1 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Spalte v_i durch einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ ersetzen, erhalten wir die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad w \mapsto \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_{i-1} \mid w \mid v_{i+1} \mid \cdots \mid v_n).$$

Sie dürfen statt der Aufgabe a) natürlich auch den allgemeinen Fall zeigen.

b) Gegeben sei eine Matrix $A := (v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass wenn $v_1 = v_2$ gilt, dann ist bereits $\det(A) = 0$.

Hinweis: *Entwickeln Sie einmal nach der ersten und einmal nach der zweiten Spalte. Sie können für bis zu 4 Teilpunkte die Aufgabe auch für $n = 3$ mit Hilfe der Spaltenentwicklung lösen.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 01. 12. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.