Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Dr. C. Steinhart

Lösungen für das 2. Übungsblatt zur Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie im WS 2023/24

Aufgabe 1. (10P)

Wir betrachten die chemische Reaktion zwischen Phosphorsäure und Löschkalk zu Calciumphosphat und Wasser:

$$a \cdot \mathrm{CaO_2H_2} + b \cdot \mathrm{H_3PO_4} \to c \cdot \mathrm{Ca_3P_2O_8} + d \cdot \mathrm{H_2O}$$

Bestimmen Sie die Reaktionsstöchiometriezahlen a, b, c, d, indem Sie ein Gleichungssystem aufstellen und dieses lösen. Was ist die vollständige Reaktionsgleichung?
Bemerkung: Da uns hier nur die Atomzahlen in den Molekülen interessieren, stehen die Moleküle in etwas fälschlicher Bezeichnung da.

Lösung 1.

Da Atome bei einer chemischen Reaktionsgleichung nicht verloren gehen, erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rcccccc}
\text{Calcium:} & a & & = & 3c & & \\
\text{Sauerstoff:} & 2a & +4b & = & 8c & + & d \\
\text{Wasserstoff:} & 2a & +3b & = & & & 2d \\
\text{Phosphor:} & & b & = & 2c & &
\end{array}$$

Umgeschrieben erhalten wir also das homogene LGS

$$\begin{array}{ccccc}
a & & -3c & & =0 \\
2a & +4b & -8c & -d & =0 \\
2a & +3b & & -2d & =0 \\
 & b & -2c & & =0
\end{array}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -8 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das durch Gaußen (das Substitutionverfahren wäre auch gegangen):

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 2 & 4 & -8 & -1\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 6 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 4 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 6 & -2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 12 & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/3\\ 0 & 0 & 6 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Wir können also das LGS nach d auflösen. Das kleinste $d \in \mathbb{N}$ sodass alle Variablen ganzzahlig sind ist $d = 6$. Wir erhalten insgesamt $a = d/2 = 3, b = d/3 = 2, c = d/6 = 1$. Die Reaktionsgleichung ist entsprechend:

$$3 \cdot \mathrm{CaO_2H_2} + 2 \cdot \mathrm{H_3PO_4} \to \mathrm{Ca_3P_2O_8} + 6 \cdot \mathrm{H_2O}$$

Aufgabe 2. (4P+2P+2P+2P)

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS:

a) $\left(\begin{array}{ccccc|c}3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\end{array}\right)$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & 7 & -17\\ 0 & 0 & -3 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Lösung 2.

a) **Möglichkeit 1:** Durch Substitution: Da in jeder Nullzeile von A auch bei b eine Null steht, haben wir eine Lösung und wir können diese direkt ablesen:

- Die Pivot-Elemente stehen in der ersten, dritten und vierten Spalte, d.h. wir wählen die anderen Variablen x_2, x_5 frei.
- Aus der dritten Zeile erhalten wir die Gleichung $x_4 - x_5 = 3 \Rightarrow x_4 = 3 + x_5$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile erhalten wir

$$\begin{aligned} & 2x_3 - x_4 + x_5 = -4 \\ \Longrightarrow\ & 2x_3 = x_4 - x_5 - 4 = 3 + x_5 - x_5 - 4 = -1 \\ \Longrightarrow\ & x_3 = -1/2 \end{aligned}$$

- Wieder in die erste Zeile eingesetzt erhalten wir:

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \\ \Longrightarrow\ & 3x_1 = -2x_3 - x_4 - 4x_5 + 1 = 1 - 3 - x_5 - 5x_5 + 1 = -1 - 6x_5 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = -1/3 - 2x_5 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \{ \begin{pmatrix} -1/3 - 2x_5 \\ x_2 \\ -1/2 \\ 3 + x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R} \}$.

Möglichkeit 2: Wir bringen das LGS zuerst in reduzierte ZSF:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid :3 \\ \mid :2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier sehen wir direkt die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -1/3 - 2x_5 \\ x_2 \\ -1/2 \\ 3 + x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R} \}$.

b) Hier können wir direkt die Lösung ablesen (es gibt nichts einzusetzen) und erhalten die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

c) Dies hat keine Lösung, da in der letzten Zeile $0 = 4$ steht.

d) Wir können dies wieder durch Rückwärts einsetzen lösen. Da wir ein homogenes LGS haben, erhalten wir damit:

   (i) Letzte Zeile: $x_4 = 0$

   (ii) Dritte Zeile: $-3x_3 + 12x_4 = 0 \Rightarrow -3x_3 + 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$.

   (iii) Zweite Zeile $4x_2 + (\dots) = 4x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

   (iv) Erste Zeile $x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

   Also ist der Nullvektor die einzige Lösung des LGS.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 10. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (6P+4P)

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $b := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Bringen Sie das LGS $(A \mid b)$ durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Zeilen-Stufen-Form und geben Sie die Lösungsmenge an.

b) Finden Sie ein $b_2 \in \mathbb{R}^3$, sodass das LGS $(A \mid b_2)$ keine Lösung besitzt.

Lösung 3.

a) Eine Möglichkeit (von vielen) das entsprechend zu Gaußen wäre:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mid :2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist damit schon direkt in reduzierter Zeilen-Stufen-Form und wir lesen als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 3 - x_3 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ ab.

b) Wir können jetzt entweder irgendein $b_2 \in \mathbb{R}^3$ ausprobieren (für fast jedes hat das LGS $(A|b_2)$ keine Lösung, d.h. das ist wirklich eine mögliche Art das zu machen), z.B. $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tuts.

Alternativ setzen wir am Ende von a) in das LGS etwas ungleich 0 (z.B. eine 1) rechts von der Nullzeile und machen die Rechenschritte rückwärts:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mid \cdot 2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Da wir das Gaußen auch wieder umgekehrt machen können, hat damit das LGS $(A \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ keine Lösung.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 10. 11. 2023 um 20 Uhr über das CMS abgegeben werden. Schreiben Sie den Namen und die Matrikelnummer Ihres Abgabepartners gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (5P+5P)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in Zeilen-Stufen-Form. Geben Sie jeweils mit einer Begründung oder einem Gegenbeispiel an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Das LGS $(A \mid b)$ hat für alle $b \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung $\Rightarrow$ Es gilt $m \leq n$.

b) Es gilt $n > m \Rightarrow$ Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ hat das LGS $(A \mid b)$ eine Lösung.

Lösung 4.

a) **Die Aussage ist richtig:** Wenn das LGS $(A \mid b)$ für alle b eine Lösung besitzen soll, darf es insbesondere keine Nullzeile haben. Das heißt, wir haben in jeder Zeile von A ein Pivot-Element. Wir haben aber, dass alle Pivot-Elemente in unterschiedlichen Spalten stehen müssen. Also haben wir mindestens so viele Spalten wie Zeilen, d.h. $m \leq n$.

b) **Die Aussage ist falsch:** Ein einfaches Gegenbeispiel wäre $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ was in reduzierter Zeilen-Stufen-Form ist. Aber für jedes $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_2 \neq 0$ besitzt $(A \mid b)$ wegen der letzten Zeile keine Lösung.