Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

4. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P+2Bonuspunkte)

Gegeben sei die Matrix (s. Datei „MatrixUB4.txt“)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 3 & -3 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & -5 & 3 & -7 & 4 & -7 & -1 & 4 \\ -1 & -5 & 2 & 3 & -2 & 5 & -3 & 5 & 1 & -3 \\ -4 & -19 & 0 & 14 & -10 & 19 & -11 & 19 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 23 & -2 & -14 & 10 & -21 & 14 & -21 & -4 & 14 \\ -1 & -4 & 1 & 3 & -1 & 4 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 3 & 3 & -2 & 5 & -3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 0 & -6 & 2 & -8 & 4 & -7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{10\times 10}$$

a) Berechnen Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Jordan-Normalform $J(A)$ von A sowie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_{10}(\mathbb{K})$ mit $S^{-1}AS = J(A)$.

b) Lösen Sie Aufgabe a) für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$.

Hinweis: Sie dürfen und sollten für die Berechnung von Eigenwerten, Matrizenmultiplikationen und -additionen sowie zur Berechnung von Kernen ein Computer-Algebra-System Ihrer Wahl wie z.B. SAGE, Wolfram-Alpha, OSCAR, GAP oder Maple benutzen.

Aufgabe 2. (4P)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Hat R nur endlich viele Elemente, dann ist R bereits ein Körper.

b) Zwei Elemente in R sind genau dann assoziiert zueinander, wenn sie das gleiche Ideal erzeugen.

Aufgabe 3. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Sei R ein Integritätsring und $a_1, \dots, a_k \in R$.

a) Sei das von $a_1, \dots, a_k$ erzeugte Ideal $I = (a_1, \dots, a_k) = \sum_i Ra_i$ ein Hauptideal $I = Rd$. Zeigen Sie, dass dann der Erzeuger d ein größter gemeinsamer Teiler von $a_1, \dots, a_k$ ist.

b) Sei der Schnitt der Hauptideale $J = \bigcap_i Ra_i$ selbst wieder ein Hauptideal $J = Rm$. Zeigen Sie, dass dann der der Erzeuger m ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von $a_1, \dots, a_k$ ist.

c) Für welche der obigen Aussagen gilt auch die Umkehrung, d.h.: Existieren ggT und kgV sind dann auch I bzw. J Hauptideale? Geben Sie entweder eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 17. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{5}i \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\nu : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$$

multiplikativ ist, d.h. für $r, s \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gilt $\nu(r \cdot s) = \nu(r) \cdot \nu(s)$.

b) Folgern Sie, dass für die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^\times = \{\pm 1\}$ gilt.

c) Finden Sie alle Teiler von 6 und $2 + 2\sqrt{-5}$.

d) Zeigen Sie, dass 6 und $2 + 2\sqrt{-5}$ keinen größten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 17. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.