Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

3. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Für einen Körper $\mathbb{K}$ sei die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2b \\ 3b-a \end{pmatrix}$$

gegeben. Für welche der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$ hat ϕ eine Jordan-Normalform? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 2. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ bezeichnet eine Wurzel eine (nicht eindeutige!) Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = B \cdot B$.

a) Zeigen Sie, dass für $n > 1$ das Jordankästchen $J_n(0)$ keine Wurzel besitzt.

b) Geben Sie für $J_3(1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Wurzel an.
Hinweis: Aus der Analysis kennen wir die Reihenentwicklung $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k}(x)^k = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{128} + \dots$

c) Zeigen Sie, dass für $\lambda > 0$ jedes Jordankästchen $J_n(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Wurzel besitzt.

Aufgabe 3. (4P)

a) Manchmal findet sich für Jordan-Kästchen auch die Definition mit Einsen auf der oberen Diagonalen:

$$\widetilde{J_n}(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_n(\lambda)^t$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{J_n}(\lambda)$ und $J_n(\lambda)$ ähnlich zueinander sind, indem Sie eine Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $J_n(\lambda) = S\widetilde{J_n}(\lambda)S^{-1}$ angeben.

b) Folgern Sie, dass jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnlich zu ihrer Transponierten A^t ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 10. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

a) Gegeben seien die beiden Endomorphismen $\phi, \psi : \mathbb{C}^{10} \to \mathbb{C}^{10}$ mit den folgenden gleichen Eigenschaften:

- Ihr charakteristisches Polynom ist jeweils $\chi(X) = (X-2)^7(X+1)^3$.
- Ihr Minimalpolynom ist jeweils $\mu(X) = (X-2)^4(X+1)^2$.
- Die Dimension der Eigenräume zum Eigenwert 2 ist $\dim(\mathrm{Eig}(\phi, 2)) = \dim(\mathrm{Eig}(\psi, 2)) = 3$.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass ϕ und ψ immer ähnlich zueinander sind.

b) Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

von Blatt 2. Geben Sie die Jordan-Normalform J von A an, sowie die zugehörige Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $A = SJS^{-1}$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 10. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.