Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

3. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

a) Was sind die möglichen Jordan-Normalformen für $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$? Geben Sie jeweils die zugehörigen charakteristischen Polynome und Minimalpolynome an.

b) Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ an, die keine Jordan-Normalform hat bzw. die eine Jordan-Normalform hat aber nicht diagonalisierbar ist.

Tutoriumsaufgabe 2.

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie jeweils eine Basiswechselmatrix $S \in GL_3(\mathbb{C})$ sodass $S^{-1}A_iS$ in Jordan-Normalform ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Seien weiterhin $\lambda \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(X - \lambda)^k$ genau dann ein Teiler des Minimalpolynoms $\mu_\phi(X)$ ist, wenn die folgende Ungleichung gilt:

$$\mathrm{Rang}((\phi - \lambda)^k) < \mathrm{Rang}((\phi - \lambda)^{k-1})).$$

Tutoriumsaufgabe 4.

Seien $\phi, \psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ zwei Endomorphismen die miteinander kommutieren. Zeigen Sie, dass dann jeder Hauptraum $H(\phi, \lambda)$ von ϕ bereits ψ-invariant ist.

Tutoriumsaufgabe 5.

Gegeben sei ein nilpotenter Endomorphismus $\rho : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ mit Minimalpolynom $\mu_\rho(X) = X^3$. Was sind die maximalen und minimalen Dimensionen von $\mathrm{Kern}(\rho)$? Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an.