Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

2. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $(A - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_k)$ nilpotent ist.

b) Sei $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit $f(\lambda_i) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots k$. Zeigen Sie, dass dann $f(A)$ invertierbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Bezout.

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie, dass dann $I_n + A$ invertierbar ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

a) Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie, dass das Ideal $I := \{(X-1)\cdot f(X) + 2 \cdot g(X) \mid f(X), g(X) \in \mathbb{Z}[X]\}$ kein Hauptideal ist.

b) Gegeben seien die beiden reellen Polynome und ihr erzeugtes Ideal

$$f(X) = X^5 + 2X^4 - X - 2, \quad g(X) = X^5 + X^4 + 2X^2 - 4X \in \mathbb{R}[X]$$
$$I = \{h_1(X)f(X) + h_2(X)g(X) \mid h_1(X), h_2(X) \in \mathbb{R}[X]\}$$

Finden Sie ein $m(X) \in \mathbb{R}[X]$ das I erzeugt, d.h. es gilt $I = m(X) \cdot \mathbb{R}[X]$.

Tutoriumsaufgabe 4.

Gegeben sei die folgende reelle Matrix in Jordan-Normalform

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

b) Welche Eigenwerte hat A? Was sind die zugehörigen Eigenräume?

c) Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Rang von A^n.

d) Geben Sie eine Zerlegung von $\mathbb{R}^5$ in A-invariante Untervektorräume an.

e) Sei $\mathbb{R}^5 = \oplus_{i=1}^n U_i$ eine Zerlegung in nicht-triviale A-invariante Untervektorräume, d.h. es gilt $U_i \neq \{0\}, \mathbb{R}^5$. Zeigen Sie, dass mindestens ein U_i Dimension 3 hat. Was ist die kleinst-mögliche Dimension $\dim(U_i)$?