Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

2. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom mit $\deg(f(X)) \leq n$. Zeigen Sie, dass $f(X)$ höchstens n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K}$ hat.

b) Wir betrachten über dem Ring $R := \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ das Polynom
$$f(X) = X^2 - \overline{1} \in R[X].$$
Bestimmen Sie die Nullstellenmenge von $f(X)$ über R. Warum können wir hier den Beweis von Teil a) nicht anwenden?

Aufgabe 2. (4P)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome zusammen mit der linearen Abbildung
$$\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad f(X) \mapsto f'(X)$$
die ein Polynom auf seine Ableitung abbildet. Weiterhin sei für $n \in \mathbb{N}$
$$P_n := \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f(X)) \leq n\}$$
der Untervektorraum der Polynome von Grad kleiner-gleich n.

a) Zeigen Sie, dass P_n bereits alle δ-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}[X]$ sind.

b) Können wir $\mathbb{R}[X]$ auf nicht-triviale Weise in δ-invariante Untervektorräume zerlegen?

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\delta|_{P_n}$.

d) Was ist das Verschwindungsideal $I(\delta) = \{f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid f(\delta) = 0\}$ von δ?

Aufgabe 3. (1P+1P+2P)

Gegeben sei die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

a) Zeigen Sie, dass A nur die Eigenwerte 1 und -1 besitzt.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

c) Finden Sie eine nicht-triviale Zerlegung von $\mathbb{C}^4 = U_1 \oplus U_2$ in A-invariante Untervektorräume $U_1, U_2 \leq \mathbb{C}^4$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 03. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Gegeben sei die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot v.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis C des kleinsten ϕ-invarianten Untervektorraums U von $\mathbb{C}^5$ der e_1 enthält und geben Sie die Darstellungsmatrix $D_{CC}(\phi|_U)$ an.

b) Finden Sie eine Basis B, sodass die Darstellungsmatrix die folgende Form hat

$$D_{BB}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 03. 05. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.