Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

13. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Endomorphismus $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wir sagen V ist *zyklisch* von ϕ erzeugt, wenn ein Vektor $v \in V$ existiert, sodass der kleinste ϕ-invariante Vektorraum $\langle\langle v \rangle\rangle$ der v enthält bereits V ist.
Zeigen Sie, dass V genau dann zyklisch von ϕ erzeugt ist, wenn $\chi_\phi(X) = \mu_\phi(X)$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 2.

Geben Sie alle abelschen Gruppen mit 42 und mit 24 Elementen an.

Tutoriumsaufgabe 3.

Finden Sie Matrizen $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ sodass für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix SAT in Smith-Normalform ist.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix und $M := \mathbb{Z}^n/\mathrm{Bild}(A)$.

a) Zeigen Sie, dass M genau dann ein Torsionsmodul ist, wenn $\det(A) \neq 0$ ist und dann $\#M = |\det(A)|$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{Z}^n$ als $\mathbb{Z}$-Modul bilden.

Tutoriumsaufgabe 5.

a) Zeigen Sie, dass ein Vektor $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ genau dann zu einer Basis von $\mathbb{Z}^n$ ergänzt werden kann, wenn $\mathrm{ggT}(v_1, \ldots, v_n) = 1$ gilt.

b) Erweitern Sie den Vektor $v := \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{Z}^3$.