Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

13. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Geben Sie an, welche der folgenden Gruppen isomorph sind und geben Sie jeweils die maximale Ordnung eines Elements an:

(i) $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(ii) $\mathbb{Z}/3024\mathbb{Z}$

(iii) $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

(iv) $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(v) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

(vi) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

Aufgabe 2. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen, $R = \mathbb{K}[X]$ und $V = \mathbb{K}^4$. Seien weiterhin die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und $\Phi_A : V \to V, v \mapsto Av$ sowie $\Phi_B : V \to V, v \mapsto Bv$ die zugehörigen Endomorphismen.

a) Wir betrachten V mit der Multiplikation $f(X) \cdot v := f(\Phi_A)(v)$ als R-Modul. Zerlegen Sie V in eine direkte Summe von p-Torsionsmoduln. Können wir V als direkte Summe von nicht-trivialen Φ_A-invariante Untervektorräume schreiben?

b) Zeigen Sie, dass A und B ähnlich zueinander sind.

c) Geben Sie einen Basiswechsel $\psi : V \to V$ an, sodass $\psi \circ \Phi_A = \Phi_B \circ \psi$ gilt.

Aufgabe 3. (4P)

Wir betrachten $\mathbb{Z}^3$ und den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untermodul U. Finden Sie eine Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{Z}^3$ und Zahlen $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$, sodass $U = \langle d_1 b_1, d_2 b_2, d_3 b_3 \rangle$ gilt. Wie viele Elemente enthält $\mathbb{Z}^3/U$?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 19. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (2P+2P+2Bonuspunkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $R = \mathbb{K}[X]$ der Polynomring, $V = \mathbb{K}^n$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Wir betrachten V mittels A als R-Modul mit der Multiplikation $f(X) \cdot v := f(A) \cdot v$ und die Abbildung

$$\phi : R^n \to V, \quad \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(A) \cdot e_i,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n \in V$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass ϕ ein surjektiver R-Modul-Homomorphismus ist.

b) Wir betrachten $\mathbb{K}^n$ auf offensichtliche Weise als Teilmenge von R^n. Damit ist $e_1, \ldots, e_n$ auch die Standardbasis von R^n als R-Modul. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Kern}(\phi) = \langle \{X \cdot e_i - Ae_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rangle_{R-Modul}$$

gilt, d.h. der Kern von ϕ wird als R-Modul von den Vektoren $(X \cdot e_i - Ae_i) \in R^n$ erzeugt.

c) Folgern Sie, dass zwei quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ genau dann ähnlich zueinander sind, wenn die Smith-Normalformen der Matrizen $\widetilde{A} := X \cdot I_n - A$ und $\widetilde{B} := X \cdot I_n - B \in R^{n\times n}$ über R gleich sind.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 19. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.