Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

1. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Sei weiterhin $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom.

a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von ϕ, dann ist $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(\phi)$.

b) Sei V endlich-dimensional und $\chi_\phi(X)$ das charakteristische Polynom von ϕ. Zeigen Sie, dass wenn $f(\phi) = 0$ gilt, dann ist bereits jede Nullstelle von $\chi_\phi(X)$ auch eine Nullstelle von $f(X)$.

Aufgabe 2. (4P)

a) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ gibt, sodass $f(A) = A^{-1}$ gilt.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra der $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $U \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation ist.

Aufgabe 3. (1P+3P+2Bonuspunkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und A eine $\mathbb{K}$-Algebra. Sei weiterhin $g \in A$ ein beliebiges Element.

a) Wir betrachten A als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung:
$$\mu_g : A \to A, \quad v \mapsto g \cdot v$$
ein $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass μ_g genau dann ein Isomorphismus ist, wenn g eine Einheit ist, d.h. es existiert eine Inverse $g^{-1} \in A$.

c) Gibt es eine $\mathbb{K}$-Algebra A mit einem Element $g \in A$, sodass μ_g injektiv aber nicht surjektiv ist oder surjektiv aber nicht injektiv ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 4. (4P)

a) Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathcal{Q} := \{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$
mit der üblichen Matrizenmultiplikation und -addition eine $\mathbb{Q}$-Algebra ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\phi : \mathcal{Q} \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}], \quad \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\sqrt{3}$$
ein $\mathbb{Q}$-Algebrenisomorphismus ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 26. 04. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.