Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

12. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (1.5P+1P+1.5P)

Sei M ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Wir betrachten wie in Übungsblatt 10 $V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von M frei von Rang n, dann ist $1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_n$ eine Basis von V.

b) Ist $M = T(M)$ ein Torsionsmodul, dann ist $V = \{0\}$.

c) $\dim(V) = \max\{\mathrm{Rang}(U) \mid U \leq M \text{ ist ein freier Untermodul}\}$.

Aufgabe 2. (1P+1P+2P)

Über einem kommuativen Ring R seien die R-Moduln M, U, F gegeben. Sei weiterhin

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, hook, "\iota"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & F \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "s"] & 0 \end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Sequenz. Wir sagen, dass die kurze exakte Sequenz spaltet, wenn es einen R-Modul-Homomorphismus $s : F \to M$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_F$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass wenn F frei ist, dann spaltet die kurze exakte Sequenz.

b) Zeigen Sie, dass wenn die kurze exakte Sequenz spaltet, dann gilt $M = \iota(U) \oplus s(F)$.

c) Sei nun R ein Hauptidealbereich und M frei und endlich erzeugt. Seien weiterhin $m_1, \ldots, m_k \in M$ linear unabhängig und $U := \langle m_1, \ldots, m_k \rangle$ ihr Erzeugnis. Zeigen Sie, dass sich $m_1, \ldots, m_k$ genau dann zu einer Basis von M fortsetzen lassen, wenn M/U torsionsfrei ist.

Aufgabe 3. (4P)

Sei R ein Hauptidealbereich und M ein freier R-Modul von Rang n. Seien weiterhin $m_1, \ldots, m_k \in R$ Erzeuger von M, d.h. es gilt $M = \langle m_1, \ldots, m_k \rangle$.

a) Zeigen Sie, dass dann $n \leq k$ gilt.

b) Sei nun $n = k$. Zeigen Sie, dass dann $m_1, \ldots, m_k$ bereits eine Basis von M ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 12. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Sei R ein Hauptidealbereich und M ein endlich erzeugter, freier Modul über R.

a) Zeigen Sie, dass jede aufsteigende Kette von Untermoduln

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M$$

stationär wird, d.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $M_N = M_{N+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Finden Sie ein Beispiel einer unendlichen, absteigenden Kette von Untermoduln

$$M \supseteq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \ldots$$

die nicht stationär wird. Insbesondere gibt es echte Untermoduln $U_1 \subsetneq U_2$ mit $\mathrm{Rang}(U_1) = \mathrm{Rang}(U_2)$.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 12. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.