Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

12. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren den Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(R)$ als die Menge $\mathrm{Quot}(R) := (R \times R \setminus \{0\})/\sim$ mit der Äquivalenzrelation:

$$(a,b) \sim (c,d) :\iff \exists k \in R \setminus \{0\} : ad = cb$$

a) Zeigen Sie, dass „$\sim$“ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wir definieren auf $\mathrm{Quot}(R)$ die Verknüpfungen

$$(a,b) + (c,d) := (ad + cb)/bd$$
$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac)/(bd)$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind und damit $\mathrm{Quot}(R)$ zu einem Ring wird.

c) Was ist die Eins von $\mathrm{Quot}(R)$? Zeigen Sie, dass jedes Element in $\mathrm{Quot}(R)$ invertierbar ist und die Abbildung $\phi : R \to \mathrm{Quot}(R), a \mapsto (a,1)$ injektiv ist.

d) Zeigen Sie, dass „$\sim$“ nicht wohldefiniert auf $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

Tutoriumsaufgabe 2.

Wir betrachten $\mathbb{Z}^2$ als $\mathbb{Z}$-Modul und den Untermodul

$$U := \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} \rangle$$

a) Bestimmen Sie den Rang und eine Basis von U.

b) Zeigen Sie, dass $M := \mathbb{Z}^2/U$ ein Torsionsmodul ist.

c) Bestimmen Sie den Annihilator von M sowie seine p-Torsions-Moduln.

Tutoriumsaufgabe 3.

Gegeben sei die Permutationsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}[X]$-Modul mit der Aktion

$$f(X) \cdot v = f(A)v$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ damit ein $\mathbb{R}[X]$-Torsionsmodul ist und bestimmen Sie dessen p-Torsions-Moduln.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul.

a) Sei $S \subseteq R$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V(S) := \{m \in M \mid \forall r \in S : r \cdot m = 0\}$$

ein Untermodul von M ist. Insbesondere sind damit der Torsionsmodul und p-Torsions-Moduln tatsächlich Moduln.

b) Sei $U \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann

$$I(U) := \{r \in R \mid \forall m \in U : r \cdot m = 0\}$$

ein Ideal von M ist. Insbesondere ist damit der Annihilator $Ann(M)$ ein Ideal von R.

Tutoriumsaufgabe 5.

Sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und $U \subseteq M$ ein Untermodul. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Aussagen an:

a) Ist R ein Hauptidealring sowie M frei und endlich erzeugt, dann ist nicht notwendigerweise U frei.

b) Ist R nullteilerfrei sowie M frei und endlich erzeugt, dann ist nicht notwendigerweise U frei.

c) Ist R ein Hauptidealbereich und M torsionsfrei, dann ist nicht notwendigerweise M frei.

Hinweis: *Sie haben die entsprechenden Beispiele bereits in der Vorlesung oder der Übung gesehen.*