Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

11. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass wenn ϕ diagonalisierbar ist, dann sind auch $\bigotimes^k \phi$, $\bigodot^k \phi$ und $\bigwedge^k \phi$ diagonalisierbar.

b) Zeigen Sie, dass für $\bigodot^k \phi$ und $\bigwedge^k \phi$ die Rückrichtung nicht gilt. Für $\bigodot^k \phi$ können Sie z.B. $k = 2$ und ϕ als eine Drehung betrachten.

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V_1, \ldots, V_n, W$ verschiedene endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir betrachten den Vektorraum Mult der multilinearen Abbildungen $\phi : \prod_{i=1}^n V_i \to W$. Zeigen Sie, dass dim(Mult) gerade das Produkt der Dimensionen der V_i und W ist.

Tutoriumsaufgabe 3.

Sei R ein kommutativer Ring und M ein freier R-Modul mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$. Seien weiterhin Elemente $c_1, \ldots, c_n \in M$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $\lambda \in R$ existiert, sodass $c_1 \wedge \cdots \wedge c_n = \lambda \cdot b_1 \wedge \cdots \wedge b_n$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass wenn $c_1, \ldots, c_n$ linear abhängig sind, dann ist λ aus a) ein Nullteiler von R.

c) Folgern Sie, dass eine injektive Abbildung $\phi : M \to M$ als Determinante keinen Nullteiler besitzt.

d) Sei $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $M = R^3$ mit der Standardbasis. Bestimmen Sie λ wie in Teil a) für die Vektoren
$$c_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$
Sei weiterhin $\phi : R^3 \to R^3$ die lineare Abbildung mit $\phi(b_i) = c_i$. Berechnen Sie für $a = 2$ die Determinante und den Kern von ϕ.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei R ein kommutativer Ring und $M = R^3$. Seien weiterhin $u, v \in M$ zwei linear unabhängige Vektoren. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\phi_{u,v} : M \to R, \quad w \mapsto \det(u \wedge v \wedge w)$$
R-linear ist. Zeigen Sie weiterhin, dass sich jedes Element in $M^\star := \mathrm{Hom}(M, R)$ als Summe von solchen $\phi_{u,v}$ schreiben lässt.