Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $1 \leq k \leq n$ eine natürliche Zahl.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in (\bigwedge^k V)^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-VR}(\bigwedge^k V, \mathbb{K})$ ein eindeutiges $v_\alpha \in \bigwedge^{n-k} V$ existiert, sodass für alle $w \in \bigwedge^k V$ die Gleichung $\alpha(w) = \det(v_\alpha \wedge w)$ gilt. Hier bezeichnet $\det : \bigwedge^n V \to \mathbb{K}$ die lineare Abbildung mit $\det(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi : (\bigwedge^k V)^\star \to \bigwedge^{n-k} V, \quad \alpha \mapsto v_\alpha$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 2. (4P+2Bonuspunkte)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $1 \leq k \leq n$ eine natürliche Zahl und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus.

a) Sei weiterhin $\chi_\phi(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{\bigwedge^k \phi}(X)$ von $\bigwedge^k \phi$ und begründen Sie Ihre Antwort.

b) ~~Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von~~ $\cancel{\bigodot^k \phi}$ ~~das Minimalpolynom von~~ $\cancel{\phi}$ ~~ist.~~

c) Geben Sie zwei Endomorphismen $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ an, die das gleiche Minimalpolynom haben, aber für die $\bigwedge^k \phi$ und $\bigwedge^k \psi$ unterschiedliche Minimalpolynome haben.

Aufgabe 3. (4P)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein freier R-Modul von Rang n. Sei weiterhin $\phi \in \mathrm{End}(M)$ ein R-Modul-Endomorphismus von M. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) ϕ ist ein Isomorphismus.

b) Für alle $k \leq n$ ist $\bigwedge^k \phi$ ein Isomorphismus von $\bigwedge^k M$.

c) $\det(\phi) \in R^\times$.

d) ϕ bildet eine Basis von M auf eine Basis von M ab.

Hinweis: *Sie dürfen für die Implikation c) $\Rightarrow$ d) die Adjunkte einer Matrix benutzen.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 05. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P+2Bonuspunkte)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $1 \leq k \leq n$ eine natürliche Zahl.

a) Wir betrachten die $\mathbb{K}$-Vektorräume

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mult}_V^k(\mathbb{K}) &:= \{\mu : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{K} \mid \mu \text{ ist multilinear}\} \\
\mathrm{Alt}_V^k(\mathbb{K}) &:= \{\mu : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{K} \mid \mu \text{ ist multilinear und alternierend}\} \\
\mathrm{Sym}_V^k(\mathbb{K}) &:= \{\mu : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{K} \mid \mu \text{ ist multilinear und symmetrisch}\}
\end{aligned}$$

mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation. Bestimmen Sie jeweils ihre Dimensionen.

b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $k = 2$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Mult}_V^2(\mathbb{R}) = \mathrm{Alt}_V^2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Sym}_V^2(\mathbb{R})$ gilt, d.h. $\mathrm{Mult}_V^2(\mathbb{R})$ ist die direkte Summe der beiden Untervektorräume $\mathrm{Alt}_V^2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}_V^2(\mathbb{R})$.

c) Stimmt die Aussage aus b) auch für $k > 2$? Begründen Sie wie immer Ihre Antwort!

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 05. 07. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.