Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

10. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Welche der folgenden Abbildungen sind wohldefiniert und haben eine lineare Fortsetzung:

$$\phi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, u \otimes v \otimes w \mapsto u + v + w$$
$$\psi : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, u \otimes v \otimes w \mapsto \langle u, v \rangle w$$
$$\rho : \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u \otimes v \otimes w \mapsto \det(u|v|w)(u + v + w)$$

Tutoriumsaufgabe 2.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien weiterhin

$$a_V : \prod_{i=1}^{n} V \to \bigwedge^{n} V \quad \text{und} \quad a_W : \prod_{i=1}^{n} W \to \bigwedge^{n} W$$

ihre jeweiligen n-fachen äußeren Produkte.

a) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\bigwedge^n \phi : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n W$ gibt, für die

$$(\bigwedge^{n} \phi \circ a_V)(v_1, \ldots, v_n) = (a_W \circ \phi)(v_1, \ldots, v_n)$$

gilt.

b) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\bigwedge^{n} \phi \neq 0 \iff \operatorname{Rang}(\phi) \geq n.$$

Hinweis: Für die eine Richtung, dürfen Sie Aufgabe 3 a) vom aktuellen Übungsblatt verwenden.

c) Sei nun $V = W$ und $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass dann $\bigwedge^n \phi$ die Multiplikation mit einem Skalar ist. Kennen Sie diesen?

Tutoriumsaufgabe 3.

a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (v, w) \mapsto v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ v_3 w_1 - w_3 v_1 \\ v_1 w_2 - w_1 v_2 \end{pmatrix}$$

eine alterneriende, bilineare Abbildung auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Sei $\phi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die entsprechend induzierte Abbildung. Geben Sie $D_{C,B}(\phi)$ bezüglich den Standardbasen B von $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$ und C an.

Tutoriumsaufgabe 4.

Sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

a) Gegeben sei das Element

$$\bigwedge^2 \mathbb{R}^4 \ni w := e_1 \wedge e_2 + 2e_2 \wedge e_3 + 3e_1 \wedge e_4 + 4e_2 \wedge e_4 - 6e_3 \wedge e_4$$

Zeigen Sie, dass w primitiv ist, d.h. es existieren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ mit $w = v_1 \wedge v_2$.

b) Zeigen Sie, dass

$$S^2\mathbb{R}^4 \ni v := e_1 \odot e_2 + 2e_2 \odot e_3 + 3e_1 \odot e_4 + 4e_2 \odot e_4 - 6e_3 \odot e_4$$

nicht primitiv ist, d.h. v liegt nicht im Bild von $S : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to S^2(\mathbb{R}^4),\ (v_1, v_2) \mapsto v_1 \odot v_2$.