Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

10. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Vorschriften sind wohldefinierte, lineare Abbildungen? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a)

$$\Psi : \bigotimes_{i=1}^{n} V \to \bigotimes_{i=1}^{n} V, \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \mapsto v_1 \otimes (v_1 + v_2) \otimes \cdots \otimes \sum_{i=1}^{n} v_i$$

b) Für beliebige lineare Abbildungen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{End}(V)$:

$$\Phi : \bigodot_{i=1}^{n} V \to \bigodot_{i=1}^{n} V, \quad (v_1 \odot \cdots \odot v_n) \mapsto \phi_1(v_1) \odot \cdots \odot \phi_n(v_n)$$

c) Für ein beliebiges $\sigma \in S_n$ die Abbildung:

$$\Delta : \bigwedge_{i=1}^{n} V \to \bigwedge_{i=1}^{n} W, \quad (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) \mapsto v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)}$$

Aufgabe 2. (4P+2Bonuspunkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Abbildung

$$\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w^t + w \cdot v^t.$$

a) Zeigen Sie, dass μ eine symmetrische, bilineare Abbildung ist.

b) Folgern Sie, dass eine lineare Abbildung $\hat{\mu} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n \odot \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $\mu(v, w) = \hat{\mu}(v \odot w)$ existiert und bestimmen Sie für $n = 2$ und Basen Ihrer Wahl $D_{CB}(\hat{\mu})$.

c) Bestimmen sie das Bild von μ und $\hat{\mu}$.

d) Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ injektiv ist und folgern Sie, dass $\mathbb{R}^n \odot \mathbb{R}^n$ auch als Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ geschrieben werden kann.

e) Können Sie auch $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ als Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ identifizieren? Geben Sie gegebenenfalls einen entsprechenden Isomorphismus an.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 28. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 3. (4P)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein endlich-dimensionaler[1] $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

   (ii) Es existiert eine alternierende Multilinearform $\mu : \prod_{i=1}^n V \to \mathbb{K}$ mit $\mu(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

   (iii) $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0$

b) Sei $U \leq V$ ein Untervektorraum mit Basis $b_1, \ldots, b_k \in U$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$U := \{v \in V \mid v \wedge b_1 \wedge \cdots \wedge b_k = 0\}.$$

Aufgabe 4. (4P+2Bonuspunkte)

Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein R-Modul.

a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{M} := A \otimes_R M$ zusammen mit der Multiplikation

$$\bullet : A \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \quad (\lambda, a \otimes m) \mapsto (\lambda a) \otimes m$$

ein A-Modul ist.

Wir betrachten ab jetzt den Spezialfall $R = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{C}$, d.h. M ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\widetilde{M}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

b) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}-VR}(M) = \dim_{\mathbb{C}-VR}(\widetilde{M})$ gilt.

c) Sei $\phi \in \mathrm{End}(M)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraumendomorphismus. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\mathrm{id} \otimes \phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \quad a \otimes m \mapsto a \otimes \phi(m)$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraumendomorphismus ist.

d) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von ϕ und $\mathrm{id} \otimes_{\mathbb{R}} \phi$.

Aufgabe 5. (schwierige Knobelaufgabe)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ zwei Endomorphismen. Seien weiterhin $\mathrm{id} \otimes \phi, \mathrm{id} \otimes \psi \in \mathrm{End}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)$ die Endomorphismen wie in Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass dann ϕ und ψ genau dann ähnlich zueinander sind, wenn auch $\mathrm{id} \otimes \phi$ und $\mathrm{id} \otimes \psi$ ähnlich zueinander sind.

Hinweis für die schwierige Richtung: *Zwei Endomorphismen ϕ, ψ heißen ähnlich, wenn eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $D_{B,B}(\phi) \cdot A = A \cdot D_{B,B}(\psi)$ existiert. Schreiben Sie A als Summe einer reellen und einer komplexen Matrix $A_r, A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und betrachten Sie das Polynom $f(\lambda, \mu) = \det(\lambda A_r + \mu A_c)$ um eine reelle Basiswechselmatrix zu finden.*

[1] Das geht eigentlich auch für beliebige Vektorräume.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 28. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.