Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1. (4P)

a) Zeigen Sie, dass der einzige $\mathbb{Z}$-Modul-Homomorphismus von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z}$ die Nullabbildung ist. Wie viele $\mathbb{Z}$-Modul-Homomorphismen gibt es von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$?

b) Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass M als Quotient eines freien Moduls geschrieben werden kann, d.h. es gibt einen freien R-Modul F und einen Untermodul $Q \leq F$ mit $F/Q \cong M$.
Hinweis: Der lineare Fortsetzungssatz und der Homomorphiesatz funktionieren wie gewohnt auch für freie Moduln bzw. Moduln.

Aufgabe 2. (4P)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{K}[X]$ zusammen mit der Multiplikation:

$$m_\phi : \mathbb{K}[X] \times V \to V, \quad (f(X), v) \mapsto f(\phi)(v)$$

a) Zeigen Sie, dass V zusammen mit der Multiplikation m_ϕ ein $\mathbb{K}[X]$-Modul ist.

Sei ab nun $V = \mathrm{Abb}_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der endlichen Folgen und

$$L : V \to V, \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots)$$
$$R : V \to V, \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$

der Links- bzw. Rechts-Shift und $\phi := R^2$ der zweifache Rechts-Shift.

b) Zeigen Sie, dass V zusammen mit den Multiplikationen m_R und m_ϕ jeweils ein freier $\mathbb{R}[X]$-Modul ist und geben Sie jeweils eine Basis an.

c) Zeigen Sie, dass V zusammen mit der Multiplikation m_L kein freier $\mathbb{R}[X]$-Modul ist.

Aufgabe 3. (2P+1P+1P)

Zeigen Sie die folgenden Isomorphien:

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \;\cong\; \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln mit $d := \mathrm{ggT}(n, m)$

b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \;\cong\; \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Moduln

c) $\mathbb{K}[X] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[X] \;\cong\; \mathbb{K}[X, Y]$ als $\mathbb{K}$-Algebra

---

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 21. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 4. (4P)

Sei R ein Integritätsring[1] und M ein freier R-Modul mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

a) Zeigen Sie, dass jede Menge $c_1, \ldots, c_{n+1} \in M$ linear abhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass jede Basis von M genau n Elemente besitzt. Man nennt dann n den *Rang* von M.

c) Zeigen Sie, dass zwei endlich erzeugte, freie R-Moduln genau dann isomorph sind, wenn sie den gleichen Rang haben.

Aufgabe 5. (6 Bonuspunkte)

(Links-)Moduln und freie Moduln können auch für nicht-kommutative Ringe wie gewohnt definiert werden. Wir wollen hier zeigen, dass dann der Begriff von Rang nicht wohldefiniert ist:
Sei $\mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der reellen Polynome. Wir betrachten den Ring der Vektorraumendomorphismen $R := \mathrm{End}(\mathbb{R}[X])$ mit der Verknüpfung als Multiplikation und der üblichen Addition als Modul über sich selbst.

a) Zeigen Sie, dass auch $B_2 := (\phi_1, \phi_2)$ mit

$$\phi_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad X^i \mapsto \begin{cases} X^{i/2} & \text{, falls } i \text{ gerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\phi_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad X^i \mapsto \begin{cases} X^{(i+1)/2} & \text{, falls } i \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

eine Basis von R als R-Modul ist.

b) Folgern Sie aus a), dass für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ die freien Moduln R^n, R^m isomorph sind.

c) Wie über kommutativen Ringen bzw. Körpern können wir auch Matrizenmultiplikation über nicht-kommutativen Ringen wie folgt definieren[2]:
Für $p, q, r \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j} \in R^{p \times q}$, $B = (b_{i,j})_{i,j} \in R^{q \times r}$ ist

$$A \cdot B := C = (c_{i,j})_{i,j} \in R^{p \times r} \quad \text{mit } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b_{k,j} a_{i,k}.$$

Zeigen Sie, dass es über R auch nicht-quadratische Matrizen gibt, die beidseitig invertierbar sind und geben Sie eine entspechende Matrix an.

[1] Es reicht eigentlich schon, wenn R kommutativ ist.

[2] Wie bei Vektorräumen entspricht das gerade der Verknüpfung von linearen Abbildungen von $R^p \to R^q \to R^r$. Da wir Links-Moduln haben ist die Multiplikation der Einträge vertauscht.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 21. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.