Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

8. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Während dem gesamten Blatt sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

Aufgabe 1. (2P)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(V \otimes W, \tau)$ ihr Skalarprodukt. Ein Element $u \in V \otimes W$ heißt *primitiv*, falls $v \in V, w \in W$ mit $\tau(v, w) = u$ existieren. Seien weiterhin $v, v' \in V$ und $w, w' \in W$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in V \otimes W \text{ ist primitiv} \iff v, v' \text{ oder } w, w' \text{ sind linear abhängig.}$$

Aufgabe 2. (2P)

Seien V, W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $U_1, U_2 \leq V$ zwei Untervektorräume mit trivialem Schnitt[1]. Zeigen Sie, dass dann die beiden Vektorräume isomorph sind:

$$W \otimes (U_1 \oplus U_2) \simeq (W \otimes U_1) \oplus (W \otimes U_2)$$

Aufgabe 3. (4P)

Seien V_1, V_2, W_1, W_2 endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\phi : V_1 \to W_1, \psi : V_2 \to W_2$ zwei Vektorraumhomomorphismen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(\phi \otimes \psi) = \mathrm{Rang}(\phi) \cdot \mathrm{Rang}(\psi)$ gilt.

b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $W_1 = V_1$ sowie $W_2 = V_2$. Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte von $\phi \otimes \psi$ gilt
$$\mathrm{Spec}(\phi \otimes \psi) = \{\lambda \cdot \mu \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(\phi), \mu \in \mathrm{Spec}(\psi)\}.$$

Aufgabe 4. (4P)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von W.

a) Sei $\phi : V \to W$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraumhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ existieren, sodass für alle $v \in V$ gilt:
$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) b_i$$

b) Zeigen Sie, dass $V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}-VR}(V, W)$ gilt.

[1] Man kann die direkte Summe auch ohne größeren Raum bilden, die Aussage gilt dann genauso.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 15. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.

Aufgabe 5. (3P+1P+2Bonuspunkte)

Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und

$$\widehat{\Psi} : \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \to \mathrm{End}(V \otimes W), \quad \sum_i \phi_i \otimes \psi_i \mapsto \big(\ (v \otimes w) \mapsto \sum_i \phi_i(v) \otimes \psi_i(w)\ \big)$$

die Abbildung vom Tutoriumsblatt.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\Psi}$ injektiv ist.
Hinweis zu einem Lösungsweg: Betrachten Sie für ein $\alpha \in V^*$ die lineare Abbildung $\rho_\alpha : V \otimes W \to W, \quad v \otimes w \mapsto \alpha(v)w$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für linear unabhängige Abbildungen ψ_i und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ nicht alle Null ein $w \in W$ mit $\sum_i \lambda_i \psi_i(w) \neq 0$ existiert.

b) Folgern Sie, dass wenn V und W endlich-dimensional sind, dann gilt $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \simeq \mathrm{End}(V \otimes W)$.

c) Sei $V = \mathrm{Abb}_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der endlichen Folgen und

$$\sigma : V \otimes V \to V \otimes V, \quad \sum_i v_i \otimes w_i \mapsto \sum_i w_i \otimes v_i.$$

Zeigen Sie, dass σ nicht im Bild von $\widehat{\Psi}$ liegt. Insbesondere ist $\widehat{\Psi}$ nicht notwendigerweise bijektiv.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Mittwoch den 15. 06. 2023 um 14 Uhr vor der Saalübung abgegeben werden. Sie können das Übungsblatt entweder direkt im CMS hochladen, im Übungskasten 47 im Keller des Hörsaalgebäudes E 2.5 einwerfen oder zu Beginn der Saalübung abgeben. Schreiben Sie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder sowie den Namen Ihres Tutors gut lesbar auf Ihre Abgabe.