Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Jun. Prof. Simon Brandhorst
Dr. C. Steinhart

8. Tutoriumsblatt zur Linearen Algebra II

Tutoriumsaufgabe 1.

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(V \otimes W, \tau)$ ihr Tensorprodukt.Ein Element $u \in V \otimes W$ heißt *primitiv*, falls $v \in V, w \in W$ mit $\tau(v, w) = u$ existieren.

a) Wir betrachten für $V = W = \mathbb{R}^2$ das Tensorprodukt

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w^t.$$

Zeigen Sie, dass die primitiven Elemente gerade die nicht-invertierbaren Matrizen sind.

b) Sei $d := \max\{\dim(V), \dim(W)\} < \infty$ die maximale Dimension von V und W. Zeigen Sie, dass sich jedes Element in $V \otimes W$ als Summe von d oder weniger primitiven Elementen schreiben lässt.

Tutoriumsaufgabe 2.

Seien V, W zwei Vektorräume und $\phi \in \mathrm{End}(V), \psi \in \mathrm{End}(W)$.

a) Seien $v \in V$ und $w \in W$ zwei Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass dann auch $v \otimes w$ ein Eigenvektor von $\phi \otimes \psi$ ist.

Sei ab nun $V = W = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Drehung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\phi \otimes \phi$ bezüglich der Basis $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$.

c) Zeigen Sie, dass $\phi \otimes \phi$ diagonalisierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie Bilder von $e_i \otimes e_j$.

Tutoriumsaufgabe 3.

Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $(V \otimes W, \tau)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W) \to \mathrm{End}(V \otimes W), \quad (\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi.$$

a) Zeigen Sie, dass Ψ bilinear ist.

b) Sei $(\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W), \rho)$ das Tensorprodukt von $\mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{End}(W)$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung

$$\widehat{\Psi} : \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \to \mathrm{End}(V \otimes W)$$

mit $\tau(\phi(v), \psi(w)) = \widehat{\Psi}(\rho(\phi, \psi))\big(\tau(v, w)\big)$ gibt.

c) Schreiben Sie den Endomorphismus

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2, \quad \sum_i v_i \otimes w_i \mapsto \sum_i w_i \otimes v_i$$

als Summe von $\phi_j \otimes \psi_j$ mit $\phi_j, \psi_j \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$.

Tutoriumsaufgabe 4.

Für zwei Vektorräume V_1, V_2 heißt ein Vektorrum V Koprodukt, wenn es lineare Abbildungen $\iota_1 : V_1 \to V$ und $\iota_2 : V_2 \to V$ gibt, sodass für jeden weiteren Vektorraum W und linearen Abbildungen $\phi_i : V_i \to W$ ein eindeutiger Vektorraumhomomorphismus $\phi : V \to W$ mit $\phi_i = \phi \circ \iota_i$ existiert, d.h. das folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& U_1 \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_1"] & \\
U_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, bend right, "\phi_2"'] & U \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

a) Zeigen Sie, dass zwei Koprodukte isomorph sind.

b) Zeigen Sie, dass die direkte Summe von zwei Vektorräumen zusammen mit ihren Einbettungen ihr Koprodukt ist.