

8. TUTORIUMSBLATT ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Tutoriumsaufgabe 1.

Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume und $(V \otimes W, \tau)$ ihr Tensorprodukt. Ein Element $u \in V \otimes W$ heißt *primitiv*, falls $v \in V, w \in W$ mit $\tau(v, w) = u$ existieren.

- a) Wir betrachten für $V = W = \mathbb{R}^2$ das Tensorprodukt

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (v, w) \mapsto v \cdot w^t.$$

Zeigen Sie, dass die primitiven Elemente gerade die nicht-invertierbaren Matrizen sind.

- b) Sei $d := \max\{\dim(V), \dim(W)\} < \infty$ die maximale Dimension von V und W . Zeigen Sie, dass sich jedes Element in $V \otimes W$ als Summe von d oder weniger primitiven Elementen schreiben lässt.

Tutoriumsaufgabe 2.

Seien V, W zwei Vektorräume und $\phi \in \text{End}(V), \psi \in \text{End}(W)$.

- a) Seien $v \in V$ und $w \in W$ zwei Eigenvektoren. Zeigen Sie, dass dann auch $v \otimes w$ ein Eigenvektor von $\phi \otimes \psi$ ist.

Sei ab nun $V = W = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Drehung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

- b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\phi \otimes \phi$ bezüglich der Basis $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$.
- c) Zeigen Sie, dass $\phi \otimes \phi$ diagonalisierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie Bilder von $e_i \otimes e_j$.

Tutoriumsaufgabe 3.

Seien V und W zwei \mathbb{K} -Vektorräume und $(V \otimes W, \tau)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \text{End}(V) \times \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(V \otimes W), \quad (\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi.$$

- Zeigen Sie, dass Ψ bilinear ist.
- Sei $(\text{End}(V) \otimes \text{End}(W), \rho)$ das Tensorprodukt von $\text{End}(V)$ und $\text{End}(W)$. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung

$$\widehat{\Psi} : \text{End}(V) \otimes \text{End}(W) \rightarrow \text{End}(V \otimes W)$$

mit $\tau(\phi(v), \psi(w)) = \widehat{\Psi}(\rho(\phi, \psi))(\tau(v, w))$ gibt.

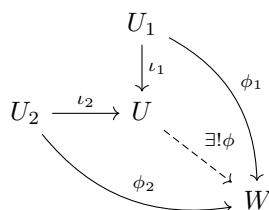
- Schreiben Sie den Endomorphismus

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2, \quad \sum_i v_i \otimes w_i \mapsto \sum_i w_i \otimes v_i$$

als Summe von $\phi_j \otimes \psi_j$ mit $\phi_j, \psi_j \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$.

Tutoriumsaufgabe 4.

Für zwei Vektorräume V_1, V_2 heißt ein Vektorraum V Koproduct, wenn es lineare Abbildungen $\iota_1 : V_1 \rightarrow V$ und $\iota_2 : V_2 \rightarrow V$ gibt, sodass für jeden weiteren Vektorraum W und linearen Abbildungen $\phi_i : V_i \rightarrow W$ ein eindeutiger Vektorraumhomomorphismus $\phi : V \rightarrow W$ mit $\phi_i = \phi \circ \iota_i$ existiert, d.h. das folgenden Diagramm kommutiert:



- Zeigen Sie, dass zwei Koproducte isomorph sind.
- Zeigen Sie, dass die direkte Summe von zwei Vektorräumen zusammen mit ihren Einbettungen ihr Koproduct ist.